ÜBUNG 12

Achtung:
12. Juni 12-14 Uhr Audimax: Vorbereitende Übung (Herr Carl)
14. Juni 10-12 Uhr Audimax: Übung (Herr Carl)
Alle weiteren vorbereitenden Übungen/Übungen finden vom 12. – 14. Juni nicht statt.

Da Folgen spezielle Funktionen sind, können wir auf Folgen auch unsere bekannten Rechenoperationen anwenden, wir definieren (erneut)

Definition 0.1. *Seien $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen, dann gilt*

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} + \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} := \{a_n + b_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots\},$$

und entsprechend

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cdot \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} := \{a_n \cdot b_n\}_{n\in\mathbb{N}} := \{a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, a_3 \cdot b_3, \dots\}.$$

AUFGABE 1

Man beweise:
Seien $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen, d.h. es gibt Grenzwerte $a, b \in \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \{a_n\} = a \text{ und } \lim_{n\to\infty} \{b_n\} = b,$$

dann gilt auch, dass die Summe der Folgen gegen die Summe der Grenzwerte konvergiert, also

$$\lim_{n\to\infty} \{a_n + b_n\} = a + b.$$

Definition 0.2. *Wir bezeichnen eine konvergente Folge als Nullfolge genau dann, wenn der Grenzwert der Folge gleich null ist.*

AUFGABE 2

Man beweise

a) Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergente Folge, dann ist $\{a_n - a\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

b) Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge, dann ist $\{a_n \cdot b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

AUFGABE 3

Man beweise
Seien $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen, d.h. es gibt Grenzwerte $a, b \in \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \{a_n\} = a \text{ und } \lim_{n\to\infty} \{b_n\} = b,$$

dann gilt, dass das Produkt der Folgen gegen das Produkt der Grenzwerte konvergiert, also

$$\lim_{n\to\infty}\{a_n \cdot b_n\} = a \cdot b.$$

Hinweise

i) Es ist zu zeigen $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0\ :\ |a_n \cdot b_n - a \cdot b| < \epsilon$.

ii) Nach Aufgabe 2*a*) sind $\{a_n - a\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{b_n - b\}_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolgen.

iii) Es gilt $|a_n \cdot b_n - a \cdot b| = |a_n \cdot b_n \underbrace{-a \cdot b_n + a \cdot b_n}_{=0} - a \cdot b|$.

iv) Die Folgen $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{a\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a, a, a, \dots\}$ sind konvergente und damit beschränkte Folgen, man verwende nun Aufgabe 2*b*)

AUFGABE 4

Man beweise
Seien $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen, so dass für alle Folgenglieder gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \le b_n \le c_n.$$

Wenn die Folgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen denselben Grenzwert g konvergieren, dann gilt:

a) Die Folge $\{a_n - c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge, d.h.

$$\lim_{n\to\infty}\{a_n - c_n\} = 0.$$

b) Die Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auch gegen g, d.h.

$$\lim_{n\to\infty}\{b_n\} = g.$$

Zum Abschluss folgt wieder eine alte Aufgabe aus einer Modulprüfung:

AUFGABE

Man bestimme - falls sie existieren - das Minimum, Maximum, Infimum und Supremum der Menge

$$M := \left\{ \frac{m}{m+n} \;\middle|\; m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Beweise sind jeweils erforderlich.
Hinweis. Es gilt $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$.