

## ÜBUNG 11

### AUFGABE 1

In dieser Aufgabe möchten wir quadratische Gleichungen lösen.

- a) In ihrer einfachsten Form ist eine quadratische Gleichung von der Art

$$x^2 = 25. \quad (1)$$

Die Lösungsmenge der Gleichung (1) besteht aus allen reellen Zahlen mit dem Quadrat 25. Diese Gleichung ist einfach zu lösen, da einerseits der Term  $x^2$  bereits ein vollständiges Quadrat ist und andererseits die Zahl 25 eine Quadratzahl ist.

Negative Lösungen nicht zu vergessen, ist die Lösungsmenge der Gleichung (1) gleich  $\{x \in \mathbb{R}: x^2 = 25\} = \{-5, 5\}$ .

Geben Sie nun die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen an.

$$(i) \quad x^2 = 9 \quad (ii) \quad x^2 = 49 \quad (iii) \quad x^2 = 2025 \quad (iv) \quad x^2 = -4$$

- b) Nun betrachten wir eine Variante, bei der die Zahl auf der rechten Seite der Gleichung keine Quadratzahl ist, zum Beispiel

$$x^2 = 3. \quad (2)$$

Nach der Definition der Wurzel ist  $\sqrt{3}$  eine positive reelle Zahl mit dem Quadrat 3. Daher ist  $\{x \in \mathbb{R}: x^2 = 3\} = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$  die Lösungsmenge der Gleichung (2).

Wir sehen, dass die Gleichung  $x^2 = 3$  zwar zwei Lösungen besitzt, die Wurzel aus 3 aber nur eine der beiden Lösungen ist. Wir merken: es gilt  $\sqrt{x^2} = |x|$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

Geben Sie nun die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen an.

$$(i) \quad x^2 = 5 \quad (ii) \quad x^2 = 7 \quad (iii) \quad x^2 = 12 \quad (iv) \quad x^2 = -1$$

- c) Nun betrachten wir eine Variante, bei der der Ausdruck auf der linken Seite immer noch ein vollständiges Quadrat ist, aber nicht mehr das Quadrat der Variablen  $x$ , zum Beispiel

$$(x - 4)^2 = 11. \quad (3)$$

Nun kommen für  $x - 4$  genau die Werte  $\sqrt{11}$  und  $-\sqrt{11}$  in Frage. Daher ist die Lösungsmenge der Gleichung (3) gleich  $\{4 + \sqrt{11}, 4 - \sqrt{11}\}$ .

Berechnen Sie nun die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen.

(i)  $(x - 5)^2 = 13$

(ii)  $(x + 1)^2 = 1$

(iii)  $(x - 8)^2 = -10$

(iv)  $(x - 3)^2 = 16$

- d) Nun betrachten wir den Fall, bei dem der Ausdruck auf der linken Seite kein vollständiges Quadrat mehr ist, zum Beispiel

$$x^2 - 6x = 16. \quad (4)$$

In diesem Fall vervollständigen wir den Term  $x^2 - 6x = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3$  zu einem Quadrat, indem wir auf beiden Seiten der Gleichung die Zahl  $3^2$  ergänzen.

Die mathematische Grundlage für diesen Schritt ist die zweite binomische Formel  $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ . Setzen wir  $a = x$ , so müssen wir  $b = 3$  halb so groß wie 6 wählen, damit der Term  $2ab$  mit dem Term  $6x$  aus der Aufgabe übereinstimmt.

Die Gleichung (4) ist damit äquivalent zu den Gleichungen

$$\begin{aligned} x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 &= 16 + 3^2 \\ \Leftrightarrow (x - 3)^2 &= 25. \end{aligned}$$

Damit kommen für  $x - 3$  genau die Werte  $-5$  und  $5$  in Frage. Die Lösungsmenge der Gleichung (4) ist daher  $\{-2, 8\}$ .

Berechnen Sie nun die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen.

(i)  $x^2 + 2x = 2$

(ii)  $x^2 - 7x = -12$

(iii)  $x^2 + 5x = -4$

(iv)  $x^2 - x = 1$

- e) Zuletzt betrachten wir quadratische Gleichungen, bei denen der Vorfaktor vor dem Monom  $x^2$  ungleich 1 ist, zum Beispiel

$$2x^2 - 24x = -70. \quad (5)$$

In diesem Fall klammern wir die 2 aus und machen anschließend eine quadratische Ergänzung. Die Gleichung (5) ist äquivalent zu den Gleichungen

$$\begin{aligned} 2 \cdot (x^2 - 12 \cdot x) &= -70, \\ 2 \cdot (x^2 - 2 \cdot x \cdot 6 + 6^2) &= -70 + 2 \cdot 6^2, \\ 2 \cdot (x - 6)^2 &= 2, \\ (x - 6)^2 &= 1. \end{aligned}$$

Damit kommen für  $x - 6$  genau die Werte  $-1$  und  $1$  in Frage. Die Lösungsmenge der Gleichung (5) ist daher  $\{5, 7\}$ .

Berechnen Sie nun die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen.

$$(i) \quad 3x^2 + 12x = 135 \qquad (ii) \quad 4x^2 + 8x = 4$$

## AUFGABE 2

Es folgen weitere Aufgaben zu quadratischen Gleichungen aus verschiedenen Gebieten der Mathematik.

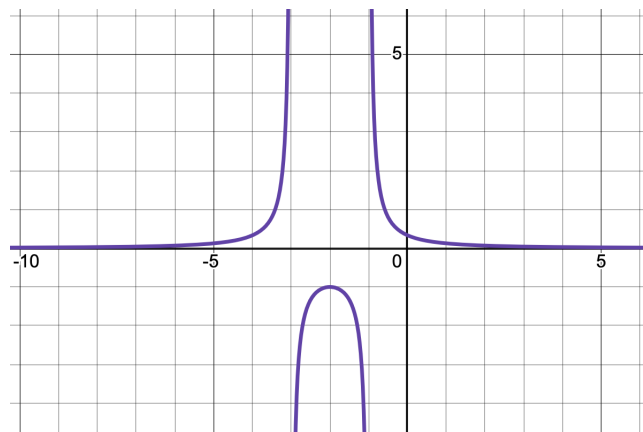
- Finden Sie alle Paare von aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen, deren Produkt 56 ist.
- Eine Seite eines Rechtecks ist genau 4 Meter länger als die andere Seite. Der Flächeninhalt des Rechtecks ist 60 Quadratmeter. Berechnen Sie die Seitenlängen des Rechtecks.
- In einer Urne befinden sich  $n$  Kugeln, von denen genau 7 Kugeln blau und die übrigen Kugeln grün sind. Die Wahrscheinlichkeit, beim Ziehen von zwei Kugeln ohne Zurücklegen zwei blaue Kugeln zu ziehen, beträgt

$$p(n) = \frac{7}{n} \cdot \frac{6}{n-1}.$$

Finden Sie alle natürlichen Zahlen  $n \in \mathbb{N}$ , für die  $p(n) = \frac{1}{5}$  gilt.

- Ermitteln Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktionsvorschrift

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 3}.$$



**AUFGABE 3**

Das Thema dieser Aufgabe ist die Geschwindigkeit. Wir bezeichnen die Geschwindigkeit mit dem Buchstaben  $v$  (nach dem lateinischen Wort *velocitas* oder dem englischen Wort *velocity*). Bewegt sich ein Subjekt oder ein Objekt mit der konstanten Geschwindigkeit  $v$ , so legt es in der Zeit  $t$  die Strecke

$$s = v \cdot t \quad (6)$$

zurück.

Hierbei messen wir die Strecke  $s$  üblicherweise in Metern (m) oder Kilometern (km), die Zeit  $t$  in Sekunden (sec), Minuten (min) oder Stunden (h) und die Geschwindigkeit  $v$  in Metern pro Sekunde ( $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ ) oder Kilometern pro Stunde ( $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ ).

a) Stellen Sie die Gleichung (6) zuerst nach  $v$  und danach nach  $t$  um.

b) Die Pace ist der Kehrwert der Geschwindigkeit:  $v^{-1} = \frac{t}{s}$ .

Im Rahmen einer Sportprüfung findet ein 3.000 m-Lauf statt. Um die Prüfung zu bestehen, müssen die Mädchen die Strecke in 15:00 Minuten und die Jungen in 13:30 Minuten zurücklegen.

Berechnen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit (in  $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ ) und die Pace (in  $\frac{\text{min}}{\text{km}}$ ) eines Mädchen und eines Jungen, die die geforderten Normen genau erfüllen.

c) Svea fährt mit dem Kanu von ihrem Zeltplatz mit einer konstanten Geschwindigkeit von  $10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  mit dem Strom bis zu einer Brücke. Dort kehrt sie um und fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit von  $6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  gegen den Strom zurück zum Zeltplatz. Die Kanufahrt dauert insgesamt 1,5 Stunden.

Berechnen Sie, welche Strecke Svea mit dem Kanu zurückgelegt hat.

d) Mario und Luigi machen ein Wettrennen in einem Stadion, dessen Laufbahn wie üblich 400 m lang ist. Die beiden Brüder starten zur gleichen Zeit an der Start- und Ziellinie, wobei beide mit konstanter Geschwindigkeit laufen. Mario ist pro Runde 30 Sekunden schneller als Luigi und überrundet ihn genau 6 Minuten nach dem Start des Rennens.

Berechnen Sie, wie lange Mario und Luigi jeweils für eine Runde brauchen.

**AUFGABE 4**

In dieser Aufgabe wollen wir uns mit den sogenannten Altersrätseln beschäftigen. Sie sind ein klassisches Format des problemorientierten Mathematikunterrichts. Sie verknüpfen *Sachsituation*, *Modellieren* (gegebene Sprache  $\rightarrow$  Variablen und Gleichungen) und das *algebraische Lösen*. Für das Grundschullehramt sind sie aus mindestens zwei Gründen interessant: erstens zur eigenen mathematischen Festigung, zweitens als Beispiel dafür, wie aus einer Sachsituation eine Gleichung wird – ein zentraler Schritt, der in der Sekundarstufe I aufgegriffen wird, in der Grundschule aber durch geeignet vereinfachte Varianten („Suche eine Zahl, sodass ...“) bereits vorbereitet werden kann.

- a) Herr Müller ist heute **dreimal** so alt wie sein Sohn Lukas. In **zwölf Jahren** wird er nur noch **doppelt** so alt sein wie Lukas.

Wie alt sind beide heute?

- b) Eine Mutter ist heute **doppelt** so alt, wie ihre Tochter damals war, als die Mutter so alt war wie die Tochter heute. Wenn die Tochter einmal so alt sein wird wie die Mutter heute, sind beide zusammen **90 Jahre** alt.

Wie alt sind Mutter und Tochter heute?

- c) Auf dem Grabstein des griechischen Mathematikers *Diophantos von Alexandria* (ca. 3. Jh. n. Chr.) soll laut Überlieferung folgende Inschrift gestanden haben:

*„Wanderer! Hier ruht Diophantos. Wundere dich über sein Lebensalter, das diese Worte verraten:*

*Ein Sechstel seines Lebens war er Kind. Ein weiteres Zwölftel verging, bis sein Bart wuchs. Nach einem weiteren Siebtel heiratete er. Fünf Jahre nach seiner Hochzeit wurde ihm ein Sohn geboren. Doch das Schicksal wollte es, dass dieser Sohn nur halb so alt wurde wie sein Vater. Vier Jahre nach dem Tod seines Sohnes starb auch Diophantos.“*

Wie alt wurde Diophantos?