# ÜBUNG 11

## AUFGABE 1

In dieser Aufgabe erhalten Sie Textaufgaben unterschiedlichen Typs. Modellieren Sie die Situationen mit geeigneten Variablen, berechnen Sie die Lösungen mit geeigneten und gut dokumentierten Umformungen und geben Sie klare Antworten auf die Fragestellungen.

a) In einem Café ist ein Bagel genau 1 Euro teurer als ein Cappuccino. Eine Gruppe bestellt 5 Cappuccinos und 3 Bagel und muss 34,20 Euro bezahlen.

Man berechne, wie teuer ein Cappuccino und ein Bagel sind.

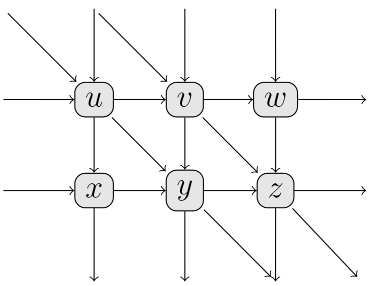
b) Ein Kinosaal hat eine Kapazität von 66 Plätzen. Der Preis für eine Eintrittskarte beträgt 13,50 Euro für einen Erwachsenen, Studierende haben jedoch Anspruch auf einen ermäßigten Eintrittspreis von 11,50 Euro. Der Preis für ein Kinderticket beträgt 8,50 Euro. Bei einer voll besuchten Vorführung waren doppelt so viele Kinder wie Nicht-Kinder anwesend. Das Kino nahm durch den Kartenverkauf 645 Euro ein.

Man ermittle, wie viele Studierende den Film sahen.

c) Die Mathe-Fachschaft der Uni Flensburg ist engagiert und aktiv. Sie organisiert die lange Nacht des Lernens, Grillabende, Quizabende und vieles mehr, vielen herzlichen Dank!

An einem Quizabend stellte die Mathe-Fachschaft eine Aufgabe: „Drei Rohre führen in einen Tank. Öffnet man nur das erste Rohr, füllt sich der Tank in zehn Minuten; öffnet man nur das zweite Rohr, füllt sich der Tank in zwanzig Minuten; öffnet man nur das dritte Rohr, füllt sich der Tank in dreißig Minuten. Wie lange dauert es, den Tank zu füllen, wenn man alle drei Rohre gleichzeitig öffnet?“

d) Eine Tomographie mit sieben Röntgenstrahlen führt auf ein System von Gleichungen. Finden Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems.




(1) $u + x = 10$
(2) $v + y = 3$
(3) $w + z = 9$
(4) $u + v + w = 14$
(5) $x + y + z = 8$
(6) $u + y = 7$
(7) $v + z = 5$

e) Ein Stadion bestehe aus einem rechteckigen Fußballfeld und einer Laufbahn. Die Laufbahn führt entlang der beiden langen Seiten des Rechtecks und entlang zweier Halbkreise um die schmalen Seiten des Rechtecks.

Nach den Vorgaben der Leichtathletik muss die Laufbahn genau 400 Meter lang sein. Man berechne die Ausmaße des Fußballfeldes, für die der Flächeninhalt der Rasenfläche größtmöglich ist.

f) Der Wert eines Diamanten ist proportional zum Quadrat seines Gewichts. Dem Händler Fabian zerbricht ein Diamant in vier Stücke, deren Gewichte sich wie $1 : 2 : 3 : 4$ verhalten. Der Verkauf der einzelnen Stücke bringt Fabian 3 000 Euro ein. Man berechne, wie viel Geld er für den ganzen Diamanten bekommen hätte.

g) Man beweise, dass die Zahl $n^4 - 40n^2 + 4 \in \mathbb{Z}$ für keine ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl ist.

h) Um eine Temperatur von Celsius in Fahrenheit umzuwandeln, können wir die Formel $f = \frac{9}{5} \cdot c + 32$ nehmen. Zum Beispiel sind 100 Grad Celsius gleich $\frac{9}{5} \cdot 100 + 32 = 212$ Grad Fahrenheit. Finden Sie eine Temperatur, die in beiden Skalen denselben Wert hat.

i) Am 21.07.2025 findet in Kiel zum zweiten Mal Schleswig-Holsteins Tag der Mathematik statt. Sie sind herzlich eingeladen, vorbeizuschauen oder mitzuhelfen!

Lösen Sie die Aufgabe, die beim ersten Tag der Mathematik gestellt worden ist: Insgesamt 50 Schülerinnen und Schüler einer Schule haben mindestens eine der Zeitungen „*Die Wurzel*“ oder „*Geolino*“ abonniert. 28 haben ein Abo für Geolino, 20 von Ihnen haben sogar beide Zeitungen abonniert. Wie viele Schülerinnen und Schüler haben ein Abo für die Wurzel?

j) Ein *pythagoreisches Tripel* ist eine Folge $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ natürlicher Zahlen mit $a^2 + b^2 = c^2$. Zum Beispiel ist $(3, 4, 5)$ ein pythagoreisches Tripel, da $3^2 + 4^2 = 5^2$ gilt.

Zeigen Sie: Wenn $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ ein pythagoreisches Tripel ist, so auch

$$(a + 2b + 2c, 2a + b + 2c, 2a + 2b + 3c) \in \mathbb{N}^3.$$

k) Ein Rechteck habe eine Diagonale der Länge 17 cm und den Flächeninhalt 120 cm$^2$. Man berechne den Umfang des Rechtecks.

l) Gegeben sei eine fünfstellige Zahl. Wir konstruieren zwei sechsstellige Zahlen. Die erste sechsstellige Zahl entsteht, indem wir der fünfstelligen Zahl die Ziffer 1 voransetzen. Die zweite sechsstellige Zahl entsteht, indem wir der fünfstelligen Zahl die Ziffer 1 hinten anfügen. Finden Sie eine fünfstellige Zahl, sodass die zweite sechsstellige Zahl dreimal so groß wie die erste sechsstellige Zahl ist.

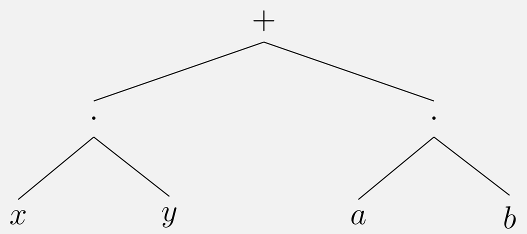
### AUFGABE 2

In der letzten Vorlesung haben wir die so genannten *Rechenbäume* kennengelernt. Rechenbäume liefern eine strukturierte Visualisierung von Termen und helfen Termaufbauten in ihrer Hierarchie zu erkennen.

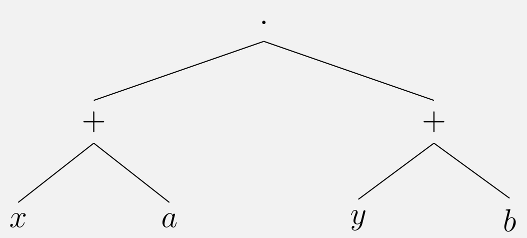
**Rechenbäume**

Gegeben sind zwei Rechenbäume mit den reellen Variablen $x, y, a, b$.
Dabei sind $a, b$ sogenannte Konstanten (z.b. $a = -3$ und $b = 2$) und $x, y$ freie Variablen.

**Rechenbaum 1:**




**Rechenbaum 2:**




a) Stellen Sie die beiden Terme $T_1(x, y), T_2(x, y)$ auf, die zu den Rechenbäumen gehören.

b) Seien $a = -3$ und $b = 2$. Bestimmen Sie $T_1(4, 9)$ und $T_2(2, -1)$.

c) Bestimmen Sie eine Belegung der beiden freien Variablen $x, y$ so, dass die beiden Terme $T_1$ und $T_2$ wertgleich sind.

d) Begründen Sie algebraisch, unter welchen Bedingungen

$$T_1 = T_2$$

gilt.

e) Entwickeln Sie einen Rechenbaum zum Term $T$ gegeben durch

$$T(x) = \frac{(x^2 + 3x - 4)(x - 1)}{(x + 2)(x^2 - 1)} + \frac{x^2 - 4}{x^2 + 3x - 4}$$

und geben Sie die Definitionsmenge von $T$ an.

## AUFGABE 3

In dieser Aufgabe wollen wir erneut die Wechselbeziehung zwischen Termen und Visualisierungen thematisieren. In der Vorlesung hatten wir schon eine Reihe von Beispielen dazu besprochen.
Wir betrachten zunächst den Term $T_1$ mit

$$T_1(a, b) := (a + b)^3 \; mit \; a, b \in \mathbb{R}.$$

Offenbar liegt hier ein Produkt aus drei Faktoren vor.

Formen Sie den Term in eine Summe von 8 Summanden Schritt für Schritt um, also

a) $T_1(a, b) := (a + b)^3 = (a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b) = \dots$

b) Geben Sie eine räumliche Visualisierung des Terms $T_1$ in Form eines Würfels so an, dass alle 8 Summanden darin semantisch erkennbar sind.

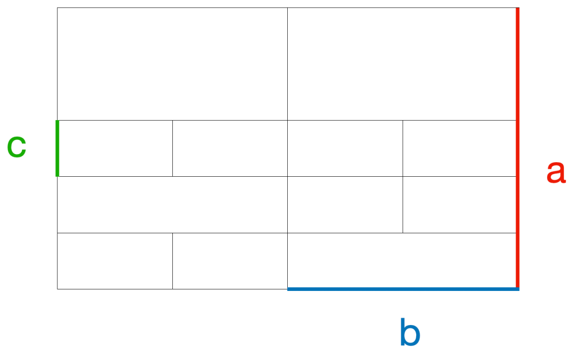
Nun betrachten wir die sogenannte dritte binomische Formel, also

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b) \; mit \; a, b \in \mathbb{R}.$$

c) Begründen Sie diese Formel syntaktisch, d.h. durch eine algebraische Umformung in einer Gleichungskette.

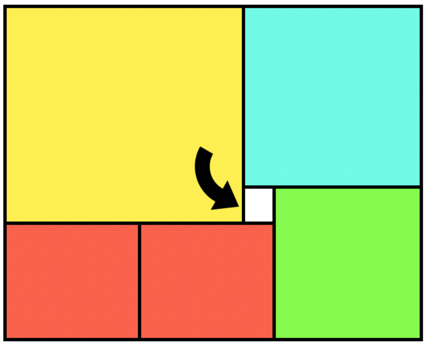
d) Geben Sie für diese Formel auch eine Visualisierung an.

Sie sehen folgende Visualisierung aus 12 Rechtecken:




e) Geben Sie fünf unterschiedliche Terme $T_i(\dots)$ für die Berechnung des Flächeninhalts für diese Figur. Welche Voraussetzungen sind dabei stillschweigend involviert?

Zum Abschluss sehen Sie ein schönes Rechteck (nicht maßstabsgetreu), dass aus genau 6 Quadraten besteht (gleiche Farbe bedeutet gleicher Flächeninhalt). Der Flächeninhalt des kleinsten weißen Quadrates (Pfeil) beträgt genau $1cm^2$.



f) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Rechtecks, indem Sie geeignete Terme für die Flächeninhalte oder Seiten der übrigen fünf Quadrate aufstellen.

*Tipp. Sind $w, g, b, r$ und $h$ mögliche Variablen für die Seitenlängen der fünf Quadrate, dann gilt beispielsweise $b + 1 = g$ oder $g + 1 = 2r$.*