ÜBUNG 11

Wir wünschen Ihnen frohe Pfingsten!

AUFGABE 1

Gegeben sei die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} := \left\{\frac{n\cdot(n+3)-4}{n^2-1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.
Man gebe ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so an, dass $|a_n - 1| < \epsilon$ für alle $n > n_0$ ist, wenn

a) $\epsilon = \frac{1}{10}$

b) $\epsilon = \frac{1}{100}$

c) $\epsilon > 0$ ist.

AUFGABE 2

Man beweise:

a) Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} := \left\{\frac{n+1}{3n-1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $\frac{1}{3}$.

b) Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} := \left\{\frac{2n^2}{4n^2+1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

c) Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} := \left\{1+(-2)^n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

AUFGABE 3

Man beweise: Wenn eine reelle Zahlenfolge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann ist der Grenzwert eindeutig bestimmt.

AUFGABE 4

Wir beginnen mit einer Definition

Definition 0.1. *Sei T eine Teilmenge von $\mathbb{R}$.*
T heiße nach oben beschränkt genau dann, wenn es eine reelle Zahl $c \in \mathbb{R}$ so gibt, dass für alle $t \in T : t \leq c$ gilt.
Entsprechend heiße T nach unten beschränkt genau dann, wenn es ein $d \in \mathbb{R}$ so gibt, dass für alle $t \in T :\ d \leq t$ gilt.
T heiße beschränkt genau dann, wenn T nach unten und nach oben beschränkt ist.

a) Man gebe eine nach oben beschränkte unendliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ an.

b) Man gebe eine beschränkte unendliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ an.

c) Seien A, B beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Man beweise oder widerlege:
i) $A \cup B$ ist beschränkt.
ii) $A \cap B$ ist beschränkt.
iii) $A \times B$ ist beschränkt. Man beachte die Definition 0.1.

AUFGABE 5

Wir erweitern auf natürliche Weise die obige Definition auf den Begriff einer reellwertigen Funktion f, d.h. eine Funktion $f : T \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heiße genau dann nach oben beschränkt, wenn ihre Bild- bzw. Wertemenge $f(T) := \{y \in \mathbb{R} \mid f(x) = y\} \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt ist, wenn also gilt:

$$\exists c \in \mathbb{R} \;\; \forall y \in f(T) : y \leq c, \text{ dies ist gleichwertig mit : } \;\; \exists c \in \mathbb{R} \;\; \forall x \in T : f(x) \leq c.$$

Entsprechend definiere man „f heiße nach unten beschränkt“ und „f heiße beschränkt“.

Da Folgen spezielle reelle Funktionen sind, lässt sich der Begriff „Beschränktheit“ auch auf Folgen anwenden...

Man beweise oder widerlege:

a) Jede reelle Zahlenfolge ist beschränkt.

b) Wenn eine Folge beschränkt ist, dann konvergiert sie.

c) Wenn eine Folge konvergiert, dann ist sie beschränkt.

****

Auf Wunsch folgen nun noch einige alte Klausuraufgaben:

AUFGABE

a) Man zeige für alle reellen Zahlen a, b :

$$max\{a,b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2} \quad und \quad min\{a,b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}$$

b) Man berechne $max\{a,b\} \cdot min\{a,b\}$.

AUFGABE

Man zeige, dass die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{2n+1}{n+2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

AUFGABE

Zur Erinnerung: Es gilt $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ und in jedem reellen Intervall findet man sowohl rationale als auch irrationale Zahlen.

Sei $f : \mathbb{R} \to \{0,1\}$ mit $x \mapsto f(x) := \begin{cases} 0, & \textit{für} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 1, & \textit{für} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ eine Funktion.

a) Man untersuche f auf Injektivität.

b) Man untersuche f auf Surjektivität.