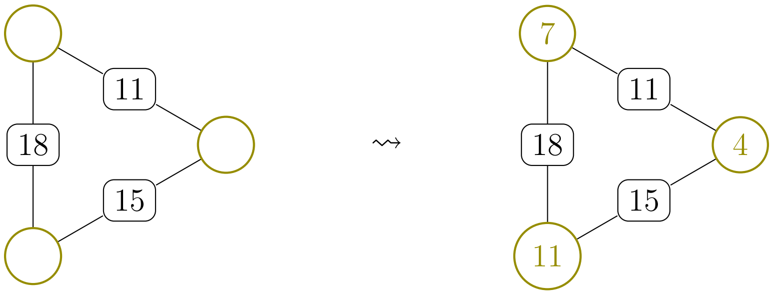
Übung 10

In der kommenden Woche können wir leider die Vorlesung nicht online anbieten.

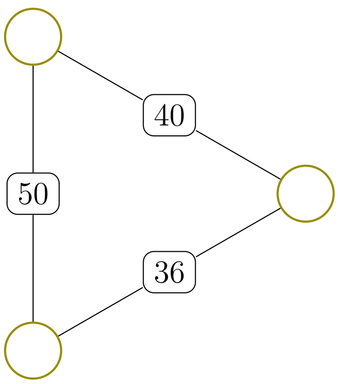
Aufgabe 1

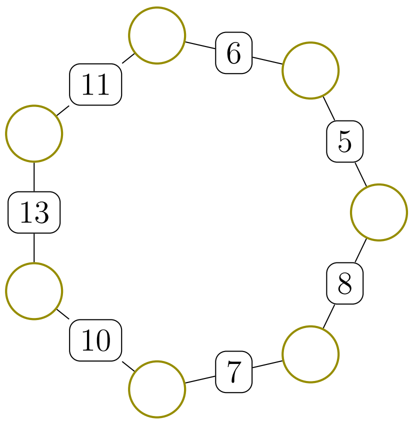
Ein *Arithmagon* ist ein Rätsel, bei dem ein Vieleck vorgegeben ist. In die Ecken des Vielecks sollen Zahlen eingetragen werden, sodass die Summe benachbarter Ecken gleich der Zahl auf der Seitenlinie ist.
Zum Beispiel hat das abgebildete Arithmagon die abgebildete Lösung, da die Gleichungen $4 + 7 = 11$, $7 + 11 = 18$ und $11 + 4 = 15$ gelten.



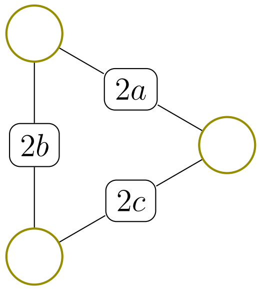
Das Wort Arithmagon ist ein Kofferwort aus den Wörtern *Arithmetik* und *Polygon*, den griechischen Fremdwörtern für Zahlentheorie und Vieleck.

a) Finden Sie eine Lösung für das Dreieck und eine Lösung für das Siebeneck.

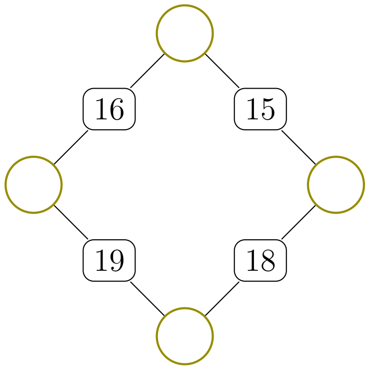




b) Begründen Sie, warum das abgebildete Arithmagon mit drei Ecken immer eine eindeutige ganzzahlige Lösung hat (egal welche ganzzahligen Werte für a, b und c sich die Designer des Rätsels ausgedacht haben).



c) Begründen Sie, warum das abgebildete Arithmagon mit vier Ecken unendlich viele ganzzahlige Lösungen besitzt.



AUFGABE 2

Variablen und Terme können uns helfen, Zusammenhänge zu erklären oder Aufgaben zu lösen. Betrachten wir zum Beispiel die Aufgabe: „Oliver ist doppelt so alt wie Sophie. In drei Jahren werden die beiden zusammen 54 Jahre alt sein. Man ermittle, wie alt Oliver und Sophie sind.“

- **Modellierung:** Zur Lösung modellieren wir das Alter von Sophie (in Jahren) durch eine Variable x und das Alter von Oliver (in Jahren) durch eine Variable y. Da Oliver doppelt so alt wie Sophie ist, gilt die Gleichung $y = 2 \cdot x$. In drei Jahren werden Sophie $x + 3$ und Oliver $y + 3$ Jahre alt sein. Die Summe ist $(x + 3) + (y + 3) = 54$.
- **Antwort:** Sophie ist 16 Jahre alt und Oliver ist 32 Jahre alt.
- **Herleitung:** Wir setzen die Bedingung $y = 2 \cdot x$ in die zweite Gleichung ein: $(x + 3) + (2 \cdot x + 3) = 54$. Ein Zusammenfassen gleichartiger Terme auf der linken Seite führt uns auf die Gleichung $3 \cdot x + 6 = 54 \Leftrightarrow 3 \cdot x = 48$. Eine Division durch 3 ergibt für Sophies Alter $x = 16$. Damit muss Oliver $y = 2 \cdot x = 2 \cdot 16 = 32$ Jahre alt sein.

Es folgen einige Aufgaben, Rätsel und Phänomeme. Modellieren Sie die Situationen durch geeignete Ausdrücke in passenden Variablen und leiten Sie anhand der Modelle Antworten oder Erklärungen ab.

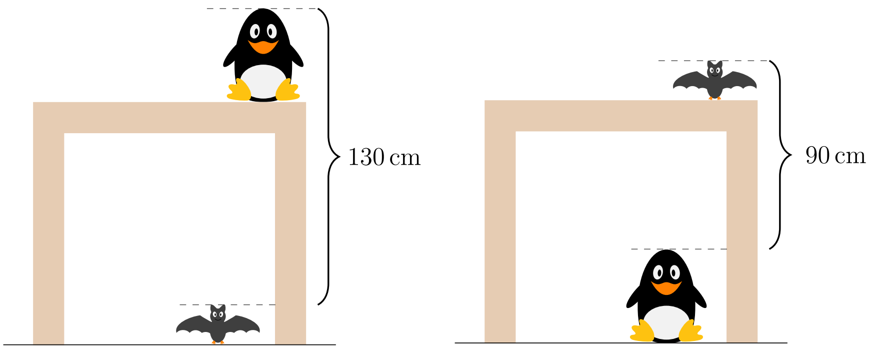
a) Die Summe von fünf aufeinanderfolgenden Zahlen ist stets durch 5 teilbar.

b) In der Klasse 1b gibt es drei Jungen mehr als Mädchen. Das Verhältnis zwischen Jungen und Mädchen beträgt 5 : 4. Wie viele Kinder hat die Klasse?

c) Frank ist ein großer Fan von Puzzlen. Sein neuestes Puzzle ist rechteckig und besteht aus insgesamt 104 Teilen, von denen 38 Randteile sind (wobei wir Eckteile zum Rand zählen). Welches Format hat das Puzzle?

d) Wir betrachten zwei Würfel. Die Kantenlänge des ersten Würfels ist 45 cm länger als die Kantenlänge des zweiten Würfels. Das Volumen des ersten Würfels ist 1000 Mal so groß wie das Volumen des zweiten Würfels. Ermitteln Sie die Kantenlängen der beiden Würfel.

e) Ida hat zwei Kuscheltiere, die Fledermaus Kasimir und den Pinguin Steve. Ein bekanntes Rätsel zeigt einen Cartoon der Kuscheltiere und stellt die Frage: Wie hoch ist der Tisch?



f) Die *Quadratzahlen* 0, 1, 4, 9, 16, 25, ... sind Zahlen der Form n^2 mit einer ganzen Zahl n.

Wir wählen nun eine natürliche Zahl, die selbst keine Quadratzahl, aber ansonsten beliebig ist, zum Beispiel die Zahl 77. Dann liegt die gewählte Zahl zwischen zwei benachbarten Quadratzahlen, im Beispiel zwischen 64 und 81. Zur nächstkleineren Quadratzahl hat sie den Abstand $77 - 64 = 13$ und zur nächstgrößeren Quadratzahl hat sie den Abstand $81 - 77 = 4$. Verringern wir nun die gewählte Zahl um das Produkt der beiden Abstände, so erhalten wir die Zahl $77 - 13 \cdot 4 = 25$, eine Quadratzahl.

Zeigen Sie, dass das Verfahren immer eine Quadratzahl ausgibt, egal welche Startzahl wir wählen.

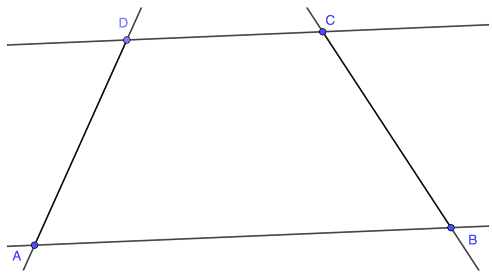
AUFGABE 3

In dieser Aufgabe gehen wir ähnlich vor, wie in dem Beispiel über die verschiedenartigen syntaktischen und semantischen Interpretationen der Flächeninhaltsformel eines Dreiecks

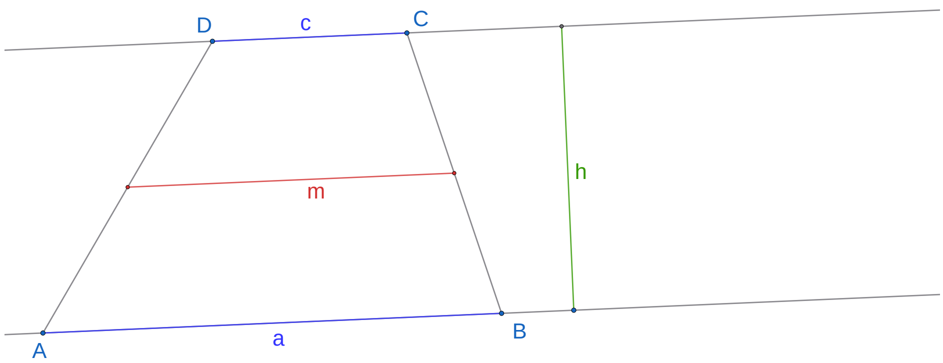
$$A(g,h) = \frac{1}{2} \cdot (g \cdot h) = \frac{g}{2} \cdot h = \frac{h}{2} \cdot g$$

mit einer Seitenlänge g und zugehöriger Höhenlänge h, welches wir am Montag besprechen werden.

Statt eines Dreiecks betrachten wir nun ein Trapez $ABCD$. Dabei verstehen wir unter einem Trapez ein Viereck $ABCD$, bei dem die Seitenlinien $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ parallel zueinander sind. Eine Visualisierung eines Trapezes könnte so aussehen.



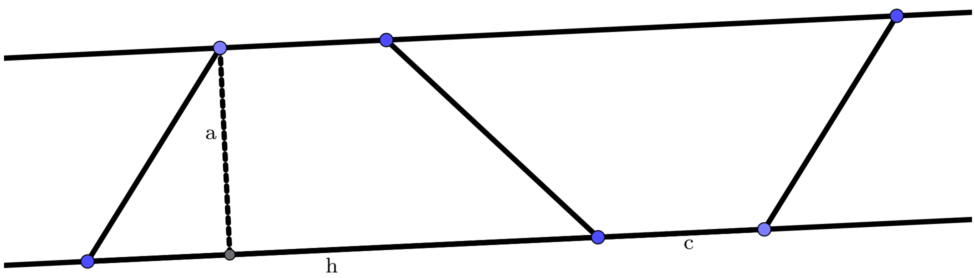
Wir führen nun die Bezeichnungen a, c, h, m für vier Längen durch das folgende Bild ein, wobei nur m als die sogenannte Mittellinie des Trapezes vielleicht ungewohnt ist. Sie ist eine Parallele zu $\overline{AB}$ (und damit auch zu $\overline{CD}$) und geht durch die beiden Mittelpunkte der Strecken AD und BC.

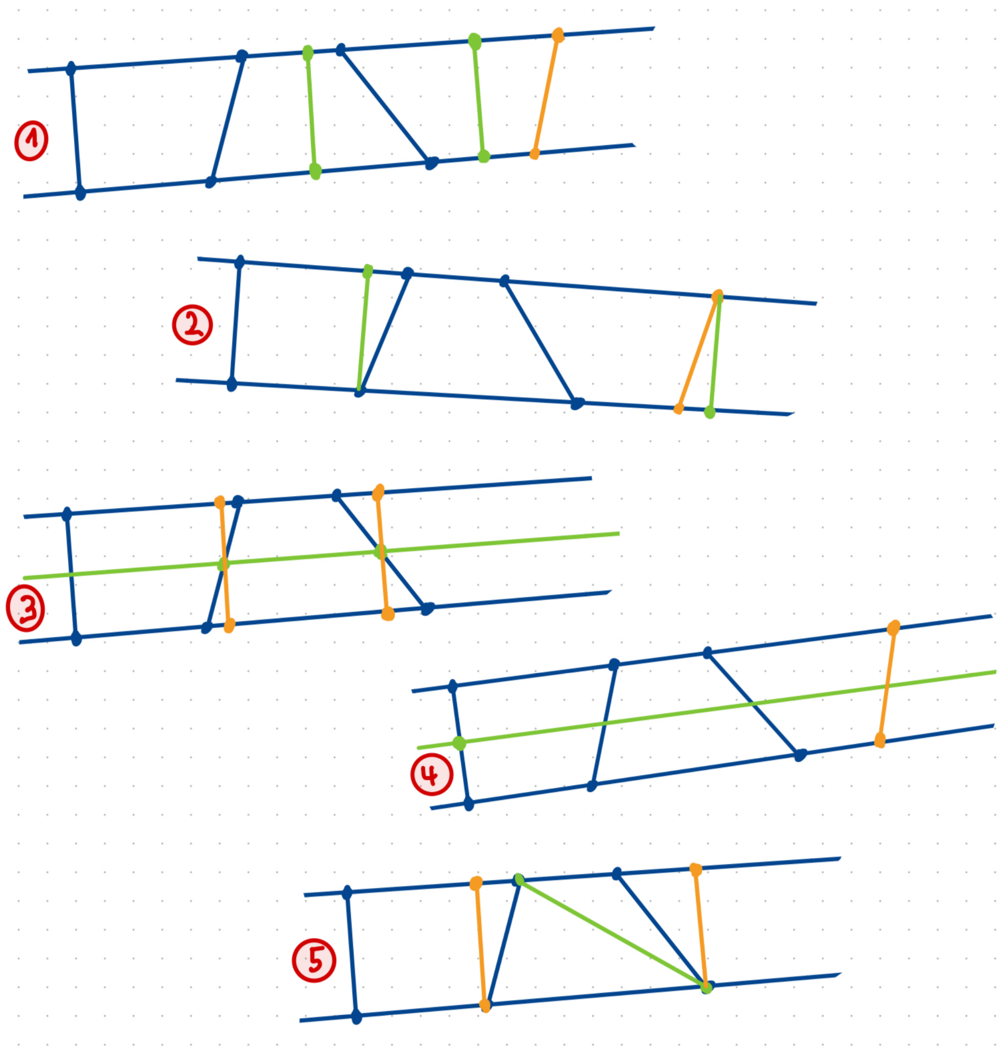


Mit jedem der nun folgenden Terme A_i sind syntaktisch andere Vorstellungen und Visualisierungen der Berechnung des Flächeninhalts eines Trapez' $ABCD$ verbunden. In der Struktur des jeweiligen Terms zeigt sich die semantische Vorstellung zur Berechnung des Flächeninhalts. Wir geben in (1) die folgenden fünf Terme:

$$\begin{aligned}
A_1(a,c,h) &= \frac{1}{2}\left((a+c)\cdot h\right) \\
A_2(a,c,h) &= \left(\frac{1}{2}(a\cdot h) + \frac{1}{2}(c\cdot h)\right) \\
A_3(a,c,h) &= \left(\frac{a+c}{2}\right)\cdot h \\
A_4(a,c,h) &= \left(\frac{h}{2}\right)\cdot (a+c) \\
A_5(m,h) &= m\cdot h
\end{aligned} \tag{1}$$

Es folgen nun eine *GeoGebra* Zeichnung und einige Skizzen mit weiteren Hilfslinien, aber ohne Buchstaben, die die unterschiedlichen Interpretationen der Flächeninhaltsformel eines Trapezes illustrieren (und mehr).





Am kommenden Montag werden wir diese nun folgenden Aufträge exemplarisch anhand des Flächeninhalts eines Dreiecks in der Vorlesung besprechen.

a) Verknüpfen Sie die fünf Skizzen jeweils mit dem passenden Term aus der obigen Auswahl (1).

b) Begründen Sie Ihre Zuordnung nachvollziehbar und ausführlich. Beschriften Sie die Skizzen gegebenenfalls zur Verdeutlichung.

c) Erklären Sie mit Hilfe Ihrer Zuordnung, warum jeder der fünf Ausdrücke aus (1) korrekt ist und wie die jeweilige Skizze zur Veranschaulichung oder zum Beweis der entsprechenden Formel beiträgt.