

ÜBUNG 10

AUFGABE 1

In dieser Aufgabe erhalten Sie Textaufgaben unterschiedlichen Typs. Modellieren Sie die Situationen mit geeigneten Variablen, berechnen Sie die Lösungen mit geeigneten und gut dokumentierten Umformungen und geben Sie klare Antworten auf die Fragestellungen.

- a) In einem Café ist ein Bagel genau 1 Euro teurer als ein Cappuccino. Eine Gruppe bestellt 5 Cappuccinos und 3 Bagel und muss 34,20 Euro bezahlen. Man berechne, wie teuer ein Cappuccino und ein Bagel sind.

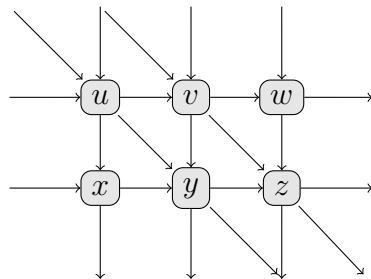
- b) Ein Kinosaal hat eine Kapazität von 66 Plätzen. Der Preis für eine Eintrittskarte beträgt 13,50 Euro für einen Erwachsenen, Studierende haben jedoch Anspruch auf einen ermäßigten Eintrittspreis von 11,50 Euro. Der Preis für ein Kinderticket beträgt 8,50 Euro. Bei einer voll besuchten Vorführung waren doppelt so viele Kinder wie Nicht-Kinder anwesend. Das Kino nahm durch den Kartenverkauf 645 Euro ein.

Man ermittle, wie viele Studierende den Film sahen.

- c) Die Mathe-Fachschaft der Uni Flensburg ist engagiert und aktiv. Sie organisiert die lange Nacht des Lernens, Grillabende, Quizabende und vieles mehr, vielen herzlichen Dank!

An einem Quizabend stellte die Mathe-Fachschaft eine Aufgabe: „Drei Rohre führen in einen Tank. Öffnet man nur das erste Rohr, füllt sich der Tank in zehn Minuten; öffnet man nur das zweite Rohr, füllt sich der Tank in zwanzig Minuten; öffnet man nur das dritte Rohr, füllt sich der Tank in dreißig Minuten. Wie lange dauert es, den Tank zu füllen, wenn man alle drei Rohre gleichzeitig öffnet?“

- d) Eine Tomographie mit sieben Röntgenstrahlen führt auf ein System von Gleichungen. Finden Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems.



- (1) $u + x = 10$
- (2) $v + y = 3$
- (3) $w + z = 9$
- (4) $u + v + w = 14$
- (5) $x + y + z = 8$
- (6) $u + y = 7$
- (7) $v + z = 5$

- e) Ein Stadion bestehe aus einem rechteckigen Fußballfeld und einer Laufbahn. Die Laufbahn führt entlang der beiden langen Seiten des Rechtecks und entlang zweier Halbkreise um die schmalen Seiten des Rechtecks.



Nach den Vorgaben der Leichtathletik muss die Laufbahn genau 400 Meter lang sein. Man berechne die Ausmaße des Fußballfeldes, für die der Flächeninhalt der Rasenfläche größtmöglich ist.

- f) Um eine Temperatur von Celsius in Fahrenheit umzuwandeln, können wir die Formel $f = \frac{9}{5} \cdot c + 32$ nehmen. Zum Beispiel sind 100 Grad Celsius gleich $\frac{9}{5} \cdot 100 + 32 = 212$ Grad Fahrenheit. Finden Sie eine Temperatur, die in beiden Skalen denselben Wert hat.
- g) Ein Rechteck habe eine Diagonale der Länge 17 cm und den Flächeninhalt 120 cm^2 . Man berechne den Umfang des Rechtecks.
- h) Gegeben sei eine fünfstellige Zahl. Wir konstruieren zwei sechsstellige Zahlen. Die erste sechsstellige Zahl entsteht, indem wir der fünfstelligen Zahl die Ziffer 1 voransetzen. Die zweite sechsstellige Zahl entsteht, indem wir der fünfstelligen Zahl die Ziffer 1 hinten anfügen. Finden Sie eine fünfstellige Zahl, sodass die zweite sechsstellige Zahl dreimal so groß wie die erste sechsstellige Zahl ist.

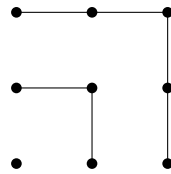
AUFGABE 2

Wir schauen uns wieder eine Serie von Figuren an. In der ersten Figur sehen wir ein Gitter aus vier Punkten. Die zweite Figur stellt ein Gitter aus neun Punkten dar, die dritte Figur zeigt ein Gitter aus 16 Punkten. Bei jeder der drei Figuren sind einige Punkte miteinander verbunden, sicher erkennen Sie ein Muster. Dieses Verfahren der Quadratgitterbildung wird nun fortgesetzt.

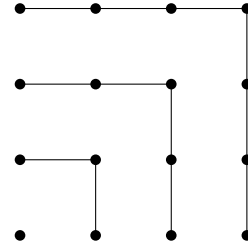
Figur 1 aus vier Punkten



Figur 2 aus neun Punkten



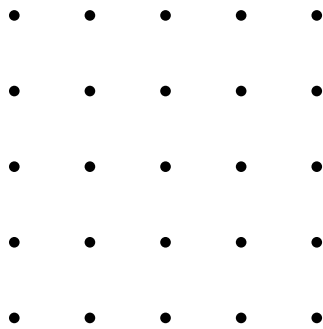
Figur 3 aus 16 Punkten



Sie sehen jetzt in der vierten Figur ein Gitter aus 25 Punkten. Zeichnen Sie eine zu den drei vorherigen drei Gittern passende und naheliegende Fortsetzung der Punkteverbindungen.

a)

Figur 4 aus 25 Punkten



Was haben nun die Punkteverbindungen mit der Anzahl der Punkte zu tun?

In Figur 1 gilt offenbar der Zusammenhang $1 + 3 = 4 = 2^2$, dabei steht in der Summe die Zahl 1 für den (isolierten) Punkt in der linken unteren Ecke. Die Zahl 3 zeigt, dass die übrigen drei Punkte verbunden sind.

Offenbar lässt sich also die Quadratzahl 4 als Summe der beiden ersten ungeraden Zahlen 1 und 3 darstellen.

- b) Überprüfen Sie - wie oben - durch eine kleine Rechnung, dass auch in den drei weiteren Figuren diese Gesetzmäßigkeit zu erkennen ist.

Figur 2: Es gilt $1 + 3 + \underline{\quad} = \underline{\quad} = \underline{\quad}$.

Figur 3: Es gilt $1 + 3 + \underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad} = \underline{\quad}$.

Figur 4: Es gilt $1 + 3 + \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad} = \underline{\quad}$.

- c) Schreiben Sie wie in Teil b) nun die Rechnung für die Figur 10.

Es gilt

- d) Wir verallgemeinern nun die Situation. Sei dazu n eine natürliche Zahl. Dann lässt sich bekanntlich jede ungerade Zahl als Term $2n - 1$ schreiben.

Schreiben Sie nun die obige Gesetzmäßigkeit für eine Figur n :

Figur n : Es gilt $1 + 3 + 5 + \dots + \underline{\quad} = \underline{\quad}$

- e) Beweisen Sie diese Gesetzmäßigkeit durch Induktion.

AUFGABE 3

In dieser Aufgabe wollen wir erneut die Wechselbeziehung zwischen Termen und Visualisierungen thematisieren. In der Vorlesung hatten wir schon eine Reihe von Beispielen dazu besprochen.

Wir betrachten zunächst den Term T_1 mit

$$T_1(a, b) := (a + b)^3 \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}.$$

Offenbar liegt hier ein Produkt aus drei Faktoren vor.

Formen Sie den Term in eine Summe von 8 Summanden Schritt für Schritt um, also

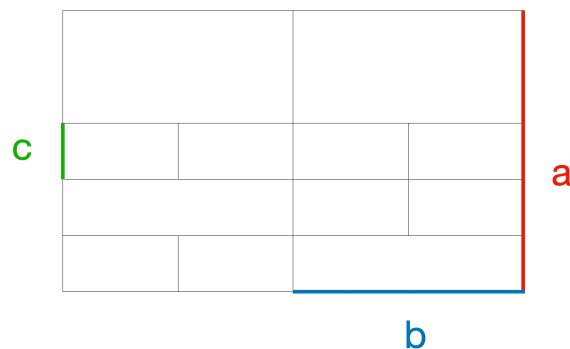
- $T_1(a, b) := (a + b)^3 = (a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b) = \dots$
- Geben Sie eine räumliche Visualisierung des Terms T_1 in Form eines Würfels so an, dass alle 8 Summanden darin semantisch erkennbar sind.

Nun betrachten wir die sogenannte dritte binomische Formel, also

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b) \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}.$$

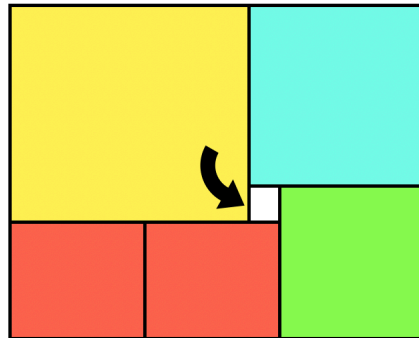
- Begründen Sie diese Formel syntaktisch, d.h. durch eine algebraische Umformung in einer Gleichungskette.
- Geben Sie für diese Formel auch eine Visualisierung an.

Sie sehen folgende Visualisierung aus 12 Rechtecken:



- Geben Sie fünf unterschiedliche Terme $T_i(\dots)$ für die Berechnung des Flächeninhalts für diese Figur. Welche Voraussetzungen sind dabei stillschweigend involviert?

Zum Abschluss sehen Sie ein schönes Rechteck (nicht maßstabsgetreu), das aus genau 6 Quadraten besteht (gleiche Farbe bedeutet gleicher Flächeninhalt). Der Flächeninhalt des kleinsten weißen Quadrates (Pfeil) beträgt genau 1cm^2 .



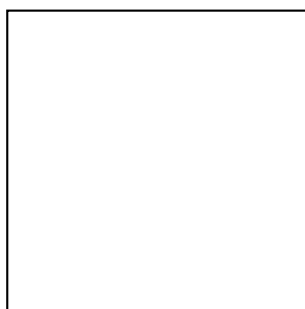
- f) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Rechtecks, indem Sie geeignete Terme für die Flächeninhalte oder Seiten der übrigen fünf Quadrate aufstellen.

Tipp. Sind w, g, b, r und h mögliche Variablen für die Seitenlängen der fünf Quadrate, dann gilt beispielsweise $b + 1 = g$ oder $g + 1 = 2r$.

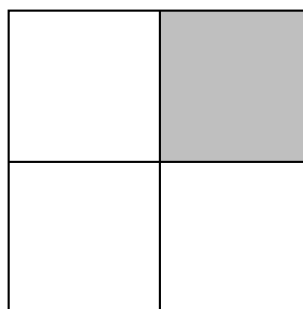
AUFGABE 4

Wir schauen uns wieder eine Serie von Figuren an. In der ersten Figur sehen wir ein Quadrat mit der Seitenlänge 1. Dieses Quadrat wird in der zweiten Figur in vier gleich große Quadrate zerlegt. In der dritten Figur wird das graue Quadrat aus Figur zwei wiederum in vier gleich große Quadrate zerlegt. In der vierten Figur wird dann wieder das graue Quadrat der dritten Figur in vier gleich große Quadrate zerlegt; das Verfahren wird fortgesetzt.

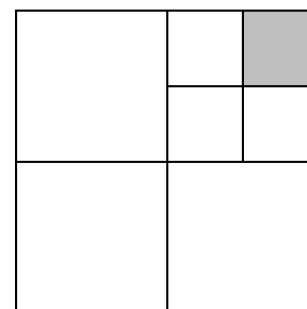
Figur 1 mit Seitenlänge 1



Figur 2 mit Seitenlänge 1



Figur 3 mit Seitenlänge 1



• • •

Offenbar hat Figur 1 einen Flächeninhalt F_1 von $1^2 = 1$. Für Figur 2 könnte man für den Flächeninhalt F_2 den Term $4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$ aufstellen. Natürlich gilt $F_2 = 1$, denn eine seriöse Rechnung ergibt sofort

$$(*) \quad F_2 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4 \cdot \frac{1^2}{2^2} = 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

- a) Stellen Sie in diesem Sinne die Terme F_3 und F_4 auf und bestätigen Sie wie in (*) durch eine ausführliche Rechnung, dass Ihre beiden Terme stets den Wert 1 haben.

Term $F_3 = \dots$

Term $F_4 = \dots$

Rechnung für $F_3 = 1$:

$F_3 = \dots$

Rechnung für $F_4 = 1$:

$F_4 = \dots$

Schauen wir uns jetzt die Anzahl A_i der Quadrate an. Figur 1 besteht aus einem Quadrat, also $A_1 = 1$, Figur 2 offenbar aus vier Quadraten, also $A_2 = 4$ (man könnte natürlich das ursprüngliche Quadrat mitzählen und käme dann auf fünf Quadrate, dies wollen wir aber nicht), usw.

- b) Geben Sie A_3, A_4, A_5 und A_{10} an.

$A_3 = \dots\dots\dots$

$$A_4 = \dots\dots\dots$$

$$A_5 = \dots\dots\dots$$

$$A_{10} = \dots\dots\dots$$

- c) Geben Sie eine Formel A_n an, mit deren Hilfe man die Anzahl der Quadrate für jede beliebige Figur n mit $n \in \mathbb{N}$ bestimmen kann.

$$A_n = \dots\dots\dots$$

- d) Berechnen Sie mit dieser Formel die Anzahl der Quadrate in Figur 100, also berechnen Sie A_{100} .

$$A_{100} = \dots\dots\dots$$