Übung 1

Ein guter Start in das neue Semester besteht darin, die Kenntnisse aus dem vorangegangenen Semester zu festigen. Zu diesem Zweck reflektieren wir auf dem ersten Übungsblatt einige Aufgaben aus den beiden Klausuren zur Algebra (auf dem grundlegenden Niveau).

Aufgabe 1 [Aus der Klausur vom 28.02.25]
Svitlana hat sich ein Spiel für eine Person ausgedacht. Das Spiel beginnt damit, dass sie eine Zahl aus der Menge $\{1, 2, 3, \ldots, 30\}$ an die Tafel schreibt.
Ein Spielzug ist eine Ersetzung der Zahl an der Tafel durch eine andere Zahl nach den folgenden zwei Spielregeln:

R1) Falls an der Tafel die Zahl n steht und n gerade ist, kann Svitlana n abwischen und durch $\frac{n}{2}$ ersetzen.

R2) Falls an der Tafel die Zahl n steht und n ungerade ist, kann Svitlana n abwischen und durch $\frac{n+31}{2}$ ersetzen.

Das Spiel endet, sobald auf der Tafel eine Zahl erscheint, die schon einmal auf der Tafel war.

Beispiel: Angenommen, Svitlana wählt als Startzahl die 21.

- Da 21 ungerade ist, ersetzt sie im ersten Zug gemäß der Regel R2 die Zahl 21 durch die Zahl $\frac{21+31}{2} = \frac{52}{2} = 26$.
- Da 26 gerade ist, ersetzt sie im zweiten Zug gemäß der Regel R1 die Zahl 26 durch die Zahl $\frac{26}{2} = 13$.

a) Man gebe die restlichen Züge des angefangenen Spieles an:

$$21 \underset{\text{R2}}{\longmapsto} 26 \underset{\text{R1}}{\longmapsto} 13 \longmapsto \_\_\_\_\_\_ \longmapsto \_\_\_\_\_\_ \longmapsto \_\_\_\_\_\_.$$

b) Man gebe den Spielverlauf zur Startzahl 12 an:

$$12 \longmapsto \_\_\_\_ \longmapsto \_\_\_\_ \longmapsto \_\_\_\_ \longmapsto \_\_\_\_ \longmapsto \_\_\_\_.$$

Nach einigen Durchläufen kommt in Svitlana der Verdacht auf, dass ein Spiel immer aus genau fünf Zügen besteht.

Um ihre Vermutung zu bestätigen, beschreiben wir die Zahlen $1, \ldots, 30$ durch einen Binärcode als Folgen $abcde$ von Ziffern $a, b, c, d, e \in \{0, 1\}$. Die Ziffernfolge $abcde$ beschreibt dabei die Darstellung einer Zahl im Zweiersystem, wobei wir führende Nullen zulassen, sodass der Einheitlichkeit halber alle Zahlen durch fünf Ziffern kodiert werden.

Beispiele:

- Die Zahl 29 erhält den Code 11101, da sie wegen $29 = 16 + 8 + 4 + 1 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$ im Zweiersystem gleich 11101_2 ist.
- Der Code 00011 beschreibt die Zahl 3, da $0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 0 + 0 + 0 + 2 + 1 = 3$ gilt. Am Anfang ergänzen wir Nullen, um immer fünf Stellen zu erhalten.

c) Man berechne den Code der Zahl 17 und die Zahl mit dem Code 01100.

d) Man wandle die Zahlen aus dem Spielverlauf aus Teilaufgabe a) in ihre Binärcodes um.

e) Angenommen, an der Tafel steht die Zahl n, welche gerade ist und den Binärcode $abcde$ (mit Ziffern $a, b, c, d, e \in \{0, 1\}$) hat.

Man erläutere, warum der Zug R1 dann n durch eine Zahl n' ersetzt, die den Binärcode $eabcd$ besitzt.

f) Angenommen, an der Tafel steht die Zahl n, welche ungerade ist und den Binärcode $abcde$ (mit Ziffern $a, b, c, d, e \in \{0, 1\}$) hat.

Man erläutere, warum der Zug R2 dann n durch eine Zahl n' ersetzt, die den Binärcode $eabcd$ besitzt.

g) Man begründe, warum ein Spiel immer genau fünf Züge hat, egal welche Zahl aus der Menge $\{1, 2, 3, \ldots, 30\}$ Svitlana als Startzahl wählt.

Die nun folgende Variante der Aufgabe war kein Teil der Klausur. Sie ist eine Bonusaufgabe, in der wir das Phänomen der Periodizität verallgemeinern und besser verstehen möchten:

Michael hat sich eine Spielvariante überlegt, in der die Startzahl aus der Menge $\{1, 2, 3, \ldots, 60\}$ kommen darf. Ein Spielzug ist eine Ersetzung der Zahl an der Tafel durch eine andere Zahl nach den folgenden zwei Spielregeln:

R1) Falls an der Tafel die Zahl n steht und n gerade ist, kann Michael n abwischen und durch $\frac{n}{2}$ ersetzen.

R2') Falls an der Tafel die Zahl n steht und n ungerade ist, kann Michael n abwischen und durch $\frac{n+63}{2}$ ersetzen.

h) Man untersuche, aus wie vielen Zügen Michaels Spiel bestehen kann.

Aufgabe 2 [Aus der Klausur vom 28.02.25]
In dieser Aufgaben seien A, B und C drei Aussagen. Ferner sei $F(A, B, C)$ eine aussagenlogische Formel, deren Wahrheitswert von A, B und C abhängt.
Wir erinnern uns, dass $F(A, B, C)$ eine *Tautologie* genannt wird, wenn sie für alle möglichen Belegungen von A, B und C wahr ist.

a) Man zeige, dass die Formel $\neg A \wedge B \wedge C$ keine Tautologie ist.

b) Man zeige (ohne Wahrheitstafel), dass die Formel $(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow C)$ eine Tautologie ist.

Nun seien $G(A, B, C)$ und $H(A, B, C)$ zwei aussagenlogische Formeln. Denys behauptet:

> Wenn sowohl $G(A, B, C)$ als auch $H(A, B, C)$ Tautologien sind, dann ist auch $G(A, B, C) \vee H(A, B, C)$ eine Tautologie.

c) Man überprüfe, ob Denys' Behauptung wahr ist.

d) Man überprüfe, ob die Umkehrung von Denys' Behauptung wahr ist.

AUFGABE 3 [Aus der Klausur vom 28.02.25]
Anton hat eine besondere sechsstellige Zahl notiert, die ausschließlich die Ziffern $1, 2, 3, 4, 5$ und 6 enthält – jede genau einmal.

Die Zahl 325614 *ist ein Beispiel für eine solche sechsstellige Zahl.*

a) Man bestimme, wie viele sechsstellige Zahlen man auf diese Weise erhalten kann.

Die Zahl 615324 *ist ein weiteres Beispiel für eine solche sechsstellige Zahl. Die ersten drei Ziffern von links gelesen ergeben die Zahl* 615*, diese ist offenbar durch* 5 *teilbar.*

b) Man bestimme, wie viele sechsstellige Zahlen man so bilden kann, dass die ersten drei Ziffern von links gelesen durch 5 teilbar sind.

Nun werden die Zahlen durch die folgenden speziellen Regeln gebildet:

- $*$ Die ersten zwei Ziffern von links gelesen bilden eine Zahl, die durch 2 teilbar ist.
- $*$ Die ersten drei Ziffern von links gelesen ergeben eine Zahl, die durch 3 teilbar ist.
- $*$ Die ersten vier Ziffern von links gelesen bilden eine Zahl, die durch 4 teilbar ist.
- $*$ Dieses Muster setzt sich fort, bis schließlich die gesamte sechsstellige Zahl durch 6 teilbar ist.

c) Man finde eine solche Zahl und gebe sie an.

d) Man finde abschließend alle derartigen Zahlen und begründe, warum nur diese Zahlen alle gegebenen Bedingungen $*$ erfüllen.

AUFGABE 4 [Aus der Klausur vom 18.12.24]
Für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Aussage

$$A(n): \text{ Es gilt } 3 \mid 2 \cdot n^3 + n.$$

a) Man überprüfe die Aussagen $A(1)$ und $A(2)$.

b) Man beweise durch eine Fallunterscheidung, dass $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.

c) Man beweise durch vollständige Induktion, dass $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.

d) Die folgende Beweisvariante war nicht in der Klausur und beruht auf einer geschickten Umformung. Man zeige, dass für alle natürlichen Zahlen n die Gleichung

$$2n^3 + n = 3n + 2(n-1)n(n+1)$$

gilt und erläutere anhand dieses Ausdrucks, warum die Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen n wahr ist.