Unsere erste Übung in diesem Semester behandelt die am Freitag geschriebene Modulprüfung.

ÜBUNG 1

AUFGABE 1

Man beweise die folgenden Aussagen.

a) Für alle Mengen A, B gilt: $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Erinnerung. Für jede Menge M ist $\mathcal{P}(M)$ die Menge aller Teilmengen von M.

b) Für alle natürlichen Zahlen $n > 1$ gilt: $n - 1 < \frac{n-1}{n} \cdot (n+1) < n$.

AUFGABE 2

Gegeben ist die folgende Aussage.

> Für alle Mengen A, B, C gilt: Wenn $A \subseteq C$ gilt, dann gilt auch $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.

a) Man gebe ein konkretes Beispiel für die Richtigkeit der Aussage an.

b) Man beweise, dass auf die Prämisse der Aussage nicht verzichtet werden kann.

c) Man beweise die Aussage.

d) Gilt auch die Umkehrung der Aussage? Man beweise die getroffene Entscheidung.

AUFGABE 3

Man untersuche, ob die Relation $W = \{(1,1), (2,2)\}$ auf der Menge $A = \{1, 2\}$ eine Äquivalenzrelation auf A ist.

AUFGABE 4

> **Definition.** Sei A eine nichtleere Menge. Seien R, S Relationen auf A, also $R \subseteq A \times A$ und $S \subseteq A \times A$.
> Die *Komposition* von S und R ist definiert als Relation auf A, und zwar durch
>
> $$S \circ R := \{(x, z) \in A \times A \mid \exists y \in A : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}.$$

Sei $A := \{1, 2, 3, 4\}$. Sei $R := \{(1,1), (1,2), (3,4)\}$ und $S := \{(2,3), (1,4)\}$.

a) Man gebe die zwei Kompositionen $S \circ R$ und $R \circ S$ konkret an.

b) Man begründe, warum das Paar $(3,4) \notin S \circ R$ ist.

Seien nun R und S **beliebige** Relationen auf einer nichtleeren Menge M, also $R, S \subseteq M \times M$.

c) Man beweise, dass aus der Reflexivität von R und S die Reflexivität der Komposition $S \circ R$ folgt.

d) Nun könnte man auch erwarten, dass aus der Symmetrie von R und S die Symmetrie der Kompostion $S \circ R$ folgt. Diese Erwartung ist falsch. Zeigen Sie dies, indem Sie die Menge $M := \{1, 2, 3\}$ zur Konstruktion eines Gegenbeispiels mit selbst gewählten Relationen R und S auf M benutzen (mit Nachweis).