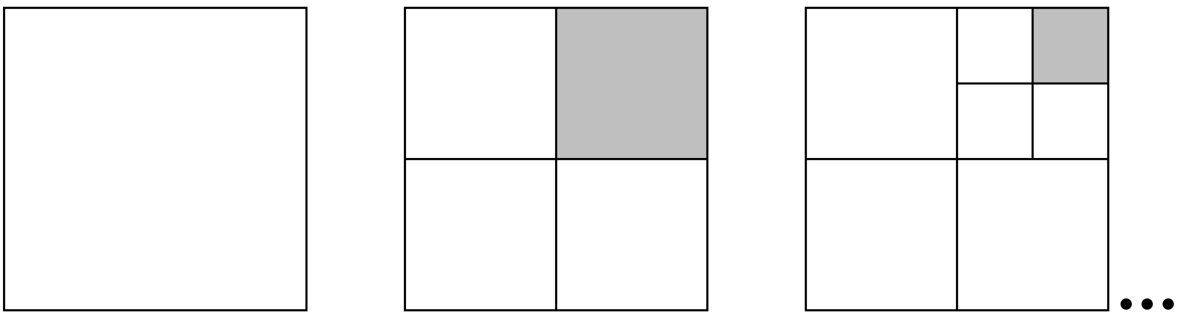
FrSe 2025	Analysis und ihre Didaktik				angemeldet	eingetragen
Vorname						
Name						
Nr.	Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4		
maximal						
erreicht						

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 - Terme

Wir schauen uns wieder eine Serie von Figuren an. In der ersten Figur sehen wir ein Quadrat mit der Seitenlänge 1. Dieses Quadrat wird in der zweiten Figur in vier gleich große Quadrate zerlegt. In der dritten Figur wird das graue Quadrat aus Figur zwei wiederum in vier gleich große Quadrate zerlegt. In der vierten Figur wird dann wieder das graue Quadrat der dritten Figur in vier gleich große Quadrate zerlegt; das Verfahren wird fortgesetzt.

Figur 1 mit Seitenlänge 1 | Figur 2 mit Seitenlänge 1 | Figur 3 mit Seitenlänge 1



Offenbar hat Figur 1 einen Flächeninhalt F_1 von $1^2 = 1$. Für Figur 2 könnte man für den Flächeninhalt F_2 den Term $4 \cdot (\frac{1}{2})^2$ aufstellen. Natürlich gilt $F_2 = 1$, denn eine seriöse Rechnung ergibt sofort

$$(*) \quad F_2 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4 \cdot \frac{1^2}{2^2} = 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

a) Stellen Sie in diesem Sinne die Terme F_3 und F_4 auf und bestätigen Sie wie in $(*)$ durch eine ausführliche Rechnung, dass Ihre beiden Terme stets den Wert 1 haben.

Term $F_3 = \ldots$ $3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2$

Term $F_4 = \ldots$ $3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2$

PS: Die Zeichnung liefert die GEOMETRISCHE REIHE $3 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots \right) = 1.$

Rechnung für $F_3 = 1$:

$F_3 = \dots\ 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$

Rechnung für $F_4 = 1$:

$F_4 = \dots\ \frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \frac{4}{64} = \frac{48 + 12 + 4}{64} = \frac{64}{64} = 1$

Schauen wir uns jetzt die Anzahl A_i der Quadrate an. Figur 1 besteht aus einem Quadrat, also $A_1 = 1$, Figur 2 offenbar aus vier Quadraten, also $A_2 = 4$ (man könnte natürlich das ursprüngliche Quadrat mitzählen und käme dann auf fünf Quadrate, dies wollen wir aber nicht), usw.

b) Geben Sie A_3, A_4, A_5 und A_{10} an.

$A_3 =$ 7

$A_4 =$ 10

$A_5 =$ 13

$A_{10} =$ 28

c) Geben Sie eine Formel A_n an, mit deren Hilfe man die Anzahl der Quadrate für jede beliebige Figur n mit $n \in \mathbb{N}$ bestimmen kann.

$A_n = 3n - 2$

d) Berechnen Sie mit dieser Formel die Anzahl der Quadrate in Figur 100, also berechnen Sie A_{100}.

$A_{100} = 3 \cdot 100 - 2 = 298$

Aufgabe 2 - Verknüpfungen

Für zwei Zahlen $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ definieren wir

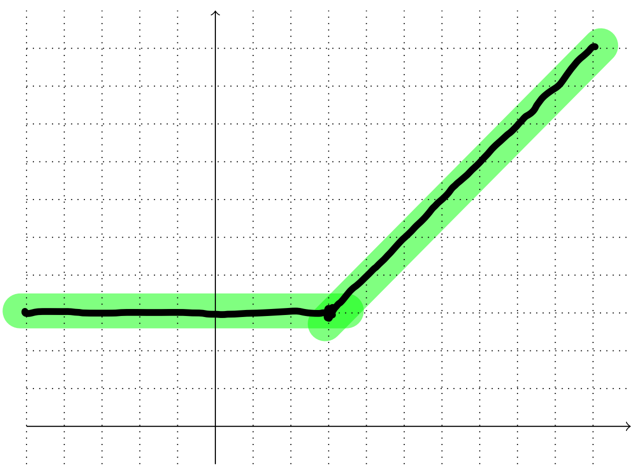
- die Zahl $a \top b$ als das *Maximum* von a und b, also die *größere* von beiden Zahlen. Ist $a = b$, so gilt $a \top a = a$.
- die Zahl $a \perp b$ als das *Minimum* von a und b, also die *kleinere* von beiden Zahlen. Ist $a = b$, so gilt $a \perp a = a$.

Beispiel: Da 4 kleiner als 7 ist, gilt $4 \top 7 = 7$ und $4 \perp 7 = 4$.

a) Geben Sie $7 \top 6$ an: Es gilt $7 \top 6 =$ 7.

b) Es seien $a = \frac{2}{3}$ und $b = \frac{3}{4}$. Geben Sie $a \perp b$ an: Es gilt $a \perp b =$ $\frac{2}{3}$.

c) Wir definieren eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = 3 \top x$. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion.



d) Berechnen Sie $3 \top (1 \perp 7)$ und $(3 \top 1) \perp (3 \top 7)$.

$3 \top (1 \perp 7) = 3 \top 1 = 3$

$(3 \top 1) \perp (3 \top 7) = 3 \perp 7 = 3$

In Verallgemeinerung der letzten Teilaufgabe möchten wir uns nun überlegen, dass die beiden Verknüpfungen sich immer distribuieren. Mit anderen Worten gilt für alle reellen Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ das *Distributivgesetz*

(1) $$(*) \quad a\top(b\bot c) = (a\top b)\bot(a\top c)\,.$$

e) Beweisen Sie die Regel $(*)$.

Lösung: Wir machen eine Fallunterscheidung nach den Größenverhältnissen unter den drei Zahlen a, b und c.

(i) 1. Fall: Es gelte $a \geq b \geq c$.
Dann ist $a\top(b\bot c) = a\top c = a$ und $(a\top b)\bot(a\top c) = a\bot a = a$, also stimmen beide Ausdrücke in diesem Fall überein.

(ii) 2. Fall: Es gelte $a \geq c \geq b$.
Dann ist $a\top(b\bot c) = a\top b = a$ und $(a\top b)\bot(a\top c) = a\bot a = a$,
also gilt $(*)$ im 2. Fall.

(iii) 3. Fall: Es gelte $b \geq a \geq c$.
Dann ist $a\top(b\bot c) = a\top c = a$ und $(a\top b)\bot(a\top c) = b\bot a = a$,
also gilt $(*)$ im 3. Fall.

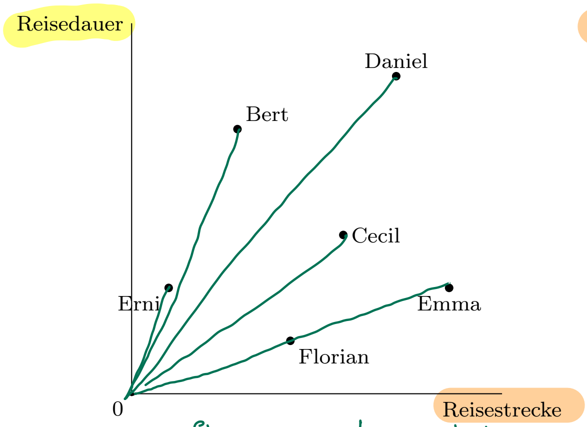
(iv) 4. Fall: Es gelte $b \geq c \geq a$.
Dann ist $a\top(b\bot c) = a\top c = c$ und $(a\top b)\bot(a\top c) = b\bot c = c$,
also gilt $(*)$ im 4. Fall.

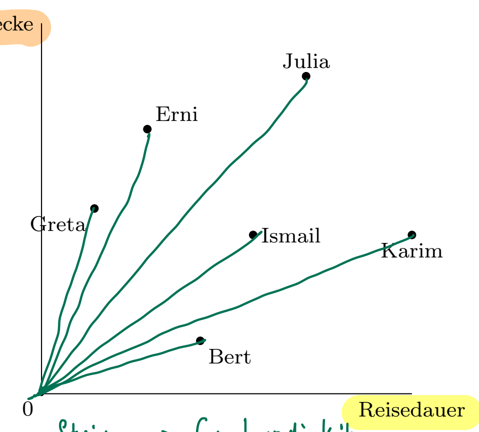
(v) 5. Fall: Es gelte $c \geq a \geq b$.
Dann ist $a\top(b\bot c) = a\top b = a$ und $(a\top b)\bot(a\top c) = a\bot c = a$,
also gilt $(*)$ im 5. Fall.

(vi) 6. Fall: Es gelte $c \geq b \geq a$.
Dann ist $a\top(b\bot c) = a\top b = b$ und $(a\top b)\bot(a\top c) = b\bot c = b$,
also gilt $(*)$ auch im 6. Fall.

Aufgabe 3a - Funktionen

Sie sehen jeweils 6 Reisende als Punkte in einem Koordinatensystem, aus dem sich qualitativ Reisestrecke und Reisedauer ablesen lassen. Geben Sie jeweils die/den Reisende/n mit der größten durchschnittlichen Reisegeschwindigkeit an. Achten Sie auf die Beschriftungen.





Steigung = Langsamkeit Steigung = Geschwindigkeit

a) Name (linkes Diagramm): .... Emma + Florian

b) Name (rechtes Diagramm): .... Greta (Tel Aviv – Paris; unfreiwillig)

Aufgabe 3b - Funktionen

Gegeben sind die beiden reellen Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit

$$f(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 6x) \text{ und}$$

$$g(x) = -|x-3| + 3.$$

Die max. Definitionsmenge ist also bei beiden Funktionen die Menge der reellen Zahlen.

a) Berechnen Sie die Funktionswerte von f und g an der Stelle für $x = 3$.

$$f(3) = \frac{1}{3} \cdot (3^2 - 6 \cdot 3) = 3 - 6 = -3$$

$$g(3) = -|3-3| + 3 = -0 + 3 = 3$$

b) Zeigen Sie, dass beide Funktionen dieselben Nullstellen besitzen.

Es gilt $g(x) = 0 \iff 3 = \sqrt{3-x}$

$\iff 9 = (3-x)^2$

$\iff 9 = 9 - 6x + x^2$

$\iff 0 = x^2 - 6x$

$\iff 0 = \frac{1}{3}(x^2 - 6x)$

$\iff 0 = f(x).$

PS: Die Nullstellen sind 0 und 6.

c) Offenbar sind beide Funktionen beschränkt, die eine nach unten die andere nach oben. Geben Sie den minimalen Funktionswert der Funktion f und den maximalen Funktionswert der Funktion g an.

$\min(f) = -3$

$\max(g) = 3$

d) Die zur x-Achse parallele Gerade im Scheitelpunkt der Funkion f – die sogenannte Scheiteltangente von f – schließt mit der Funktion g ein gleichschenkliges Dreieck ein. Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

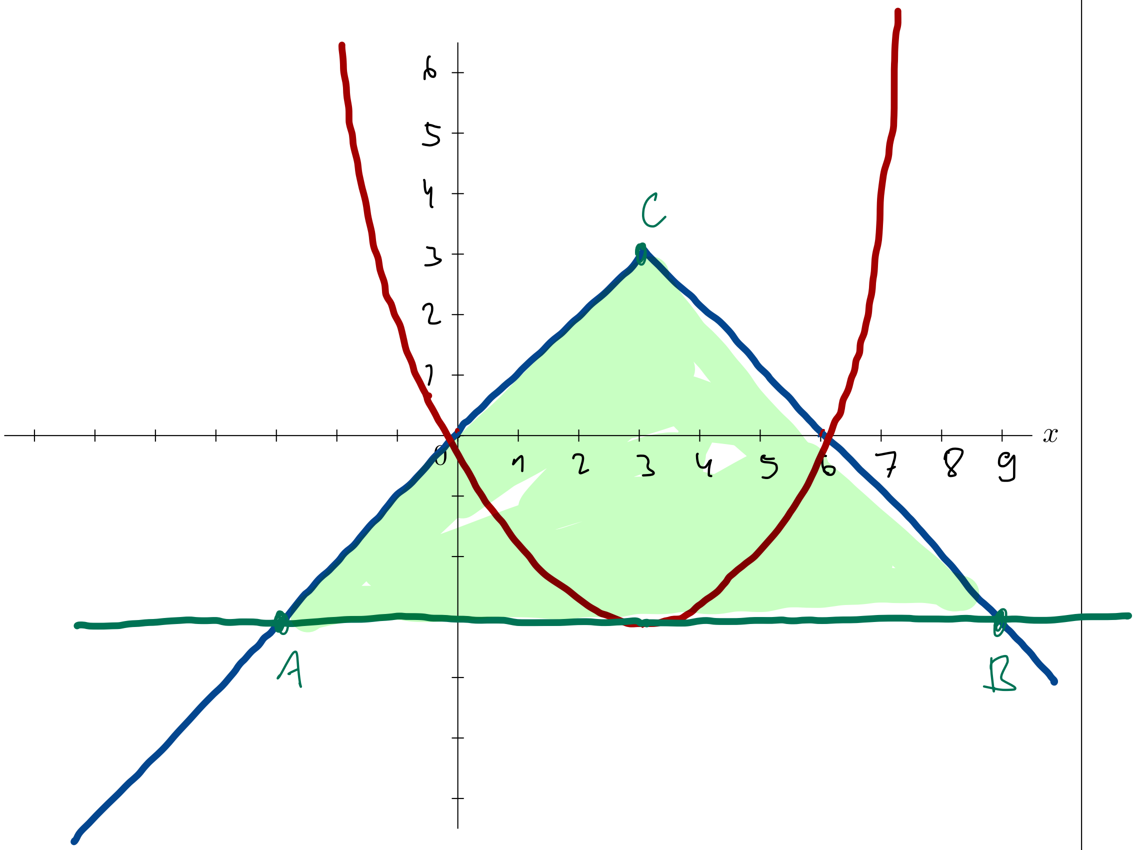
Die Eckpunkte des Dreiecks sind $A = (-3,-3)$, $B = (9,-3)$ und $C = (3,3)$.

Folglich hat ABC eine Grundseite der Länge $|AB| = 12$ und eine zugehörige Höhe der Länge 6.

Damit ist der Flächeninhalt

$$\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6 = \underline{\underline{36}}.$$

e) Skizzieren Sie sowohl f als auch g; skizzieren Sie auch das angesprochene Dreieck.



Aufgabe 4 - Gleichungen
Bestimmen Sie jeweils den Definitionsbereich und die Lösungsmenge der Gleichung durch eine Äquivalenzumformung (ohne p-q-Formel).

a) $x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{8} = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + 2\cdot x \cdot \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{8}\right)^2 - \left(\frac{1}{8}\right)^2 - \frac{1}{8} = 0$ [nahrhafte Null]

$\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{1}{8}\right)^2 - \frac{1}{64} - \frac{8}{64} = 0$ [1. Binomische Formel]

$\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{1}{8}\right)^2 - \left(\frac{3}{8}\right)^2 = 0$ [$\frac{1}{64} + \frac{8}{64} = \frac{9}{64} = \left(\frac{3}{8}\right)^2$]

$\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{1}{8} - \frac{3}{8}\right)\cdot\left(x + \frac{1}{8} + \frac{3}{8}\right) = 0$ [3. Binomische Formel]

$\Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{1}{4}\right)\cdot\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0$ [Bruchrechnung]

$\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{4}$ oder $x = -\frac{1}{2}$ [Satz vom Nullprodukt]

Also gilt $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{4} \vee x = -\frac{1}{2}\} = \underline{\underline{\left\{\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right\}}}$

b) $\sqrt{x+2} = 4 - x$

$\overset{\square}{\Leftrightarrow} \quad x + 2 = (4-x)^2$ und $x + 2 \geq 0$ und $4 - x \geq 0$

$\overset{2BF}{\Leftrightarrow} \quad x + 2 = 16 - 8x + x^2$ und $x \geq -2$ und $4 \geq x$

$\overset{-x-2}{\Leftrightarrow} \quad 0 = 14 - 9x + x^2$ und $-2 \leq x \leq 4$

$\overset{\text{Vieta}}{\Leftrightarrow} \quad 0 = (7-x)(2-x)$ und $-2 \leq x \leq 4$

$\overset{\text{Nullprodukt}}{\Leftrightarrow} \quad (x = 7$ oder $x = 2)$ und $-2 \leq x \leq 4$

$\Leftrightarrow \quad x = 2$

! $x = 7$ ist eine SCHEINLÖSUNG.

Also gilt $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2\} = \underline{\underline{\{2\}}}$.