FrSe 2025	Analysis und ihre Didaktik				angemeldet	eingetragen
Vorname						
Name						
Nr.	Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4		
maximal						
erreicht						

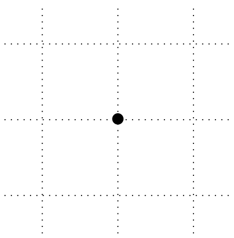
Liebe Studierende,
anbei erhalten Sie ein Übungsblatt mit vier Aufgaben, die zur selbstständigen Vorbereitung auf die bevorstehende Klausur gedacht sind. Ziel dieser Aufgaben ist es, Ihnen eine zusätzliche Möglichkeit zu geben, die zentralen Inhalte der Veranstaltung zu wiederholen und zu vertiefen.
Die Aufgaben repräsentieren jeweils eines der vier thematischen Schwerpunkte, die wir im Laufe des Semesters behandelt haben. Bitte beachten Sie jedoch: In der Klausur ist es nicht garantiert, dass jedes dieser Themen exakt so oder einzeln in Erscheinung tritt. Es ist ebenso möglich, dass Aufgaben mehrere Themenbereiche miteinander verknüpfen o.ä.
Auch wenn die Struktur der Übungsaufgaben der Klausurform nahekommt, kann sich die Gestaltung einzelner Klausurfragen durchaus unterscheiden – sowohl im Umfang als auch im Anspruchsniveau oder in der Art der Fragestellung. Lassen Sie sich also nicht davon irritieren, wenn in der Prüfung andere Schwerpunkte gesetzt werden.
Planen Sie für die Bearbeitung des Übungsblattes bitte nicht mehr als zwei Stunden ein. Ziel ist nicht eine vollständige Klausursimulation, sondern ein gezieltes Üben typischer Denk- und Rechenwege.

Weitere Hinweise zur Klausur, zu den relevanten Themen und zu organisatorischen Aspekten werde ich Ihnen am kommenden Montag in der Veranstaltung geben.

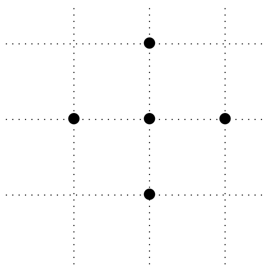
Aufgabe 1 - Terme

Wir schauen uns ein Muster von Punkten an. Das erste Muster $n = 1$ besteht aus einem Punkt, das zweite Muster $n = 2$ aus 5 Punkten usw. Die Punktmuster veranschaulichen dabei stets Quadrate.

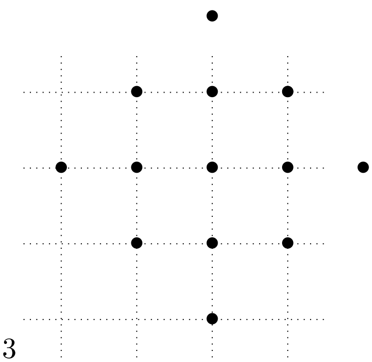
$n = 1$



$n = 2$



$n = 3$



a) Geben Sie drei verschiedene Terme zur Berechnung der Anzahl der Punkte für das Muster $n = 3$.

Term 1:

Term 2:

Term 3:

b) Zeichnen Sie das vierte Muster $n = 4$ und geben Sie die Anzahl der Punkte an.

c) Ermittle die Anzahl der Punkte im Muster für $n = 10$.

d) Stellen Sie eine Formel auf, mit deren Hilfe man die Anzahl der Punkte für jede beliebige natürliche Zahl n bestimmen kann. Berechnen Sie mit dieser Formel die Anzahl der Punkte für $n = 30$.

Aufgabe 2 - Funktionen

Gegeben sind die beiden reellen Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit

$$f(x) = 2x^2 - 4x - 6, und$$

$$g(x) = x^2 - x - 2.$$

Die max. Definitionsmenge ist also bei beiden Funktionen die Menge der reellen Zahlen.

$a)$ Schreiben Sie beide Funktionsterme als Produkt.

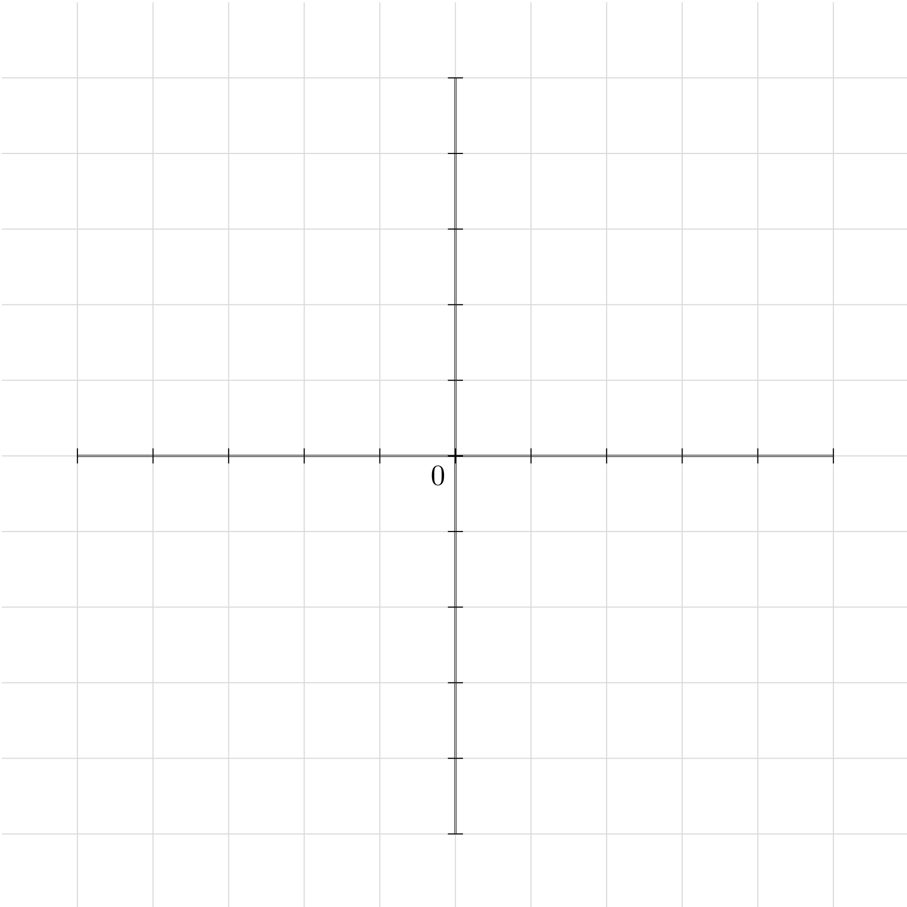
b) Bestimmen Sie die Nullstellen der beiden Funktionen.

c) Untersuchen Sie die Funktion g auf Surjektivität.

d) Untersuchen Sie die Funktion f auf Injektivität.

e) Bestimmen Sie rechnerisch die gemeinsamen Punkte der beiden Funktionen (ohne Benutzung der p–q–Formel).

f) Skizzieren Sie f, g rein qualitativ.



Aufgabe 3 - Gleichungen

Beispiel. Wenn man zur Zahl 36 die Zahl 37 addiert, so erhält man die Zahl 73.
Offenbar haben durch die Addition von 36 und 37 die beiden Ziffern des zweiten Summanden getauscht.

Man bestimme alle zweistelligen Zahlen, bei denen sich nach der Addition von 36 die beiden Ziffern vertauschen (wie im Beispiel). Die Zahl 36 nennen wir kurz die Basiszahl.

a) Stellen Sie eine Gleichung auf, die die Situation modelliert. Führen Sie dazu geeignete Variablen ein.

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung.

c) Bestimmen Sie eine weitere Basiszahl und geben Sie hierfür die Lösungen an.

Aufgabe 4 - Gruppen

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Das Assoziativitätsaxiom besagt, dass die zwei möglichen Klammerungen eines Produktes aus drei Faktoren miteinander übereinstimmen.
In Formeln:

$$\forall x \in G\colon \forall y \in G\colon \forall z \in G\colon x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z. \tag{1}$$

In dieser Aufgabe möchten wir uns überlegen, dass auch Produkte von vier Faktoren beliebig umgeklammert werden können. Zu diesem Zweck seien $a, b, c, d \in G$. Dann gibt es genau fünf Klammerungen des Produktes $abcd$, nämlich

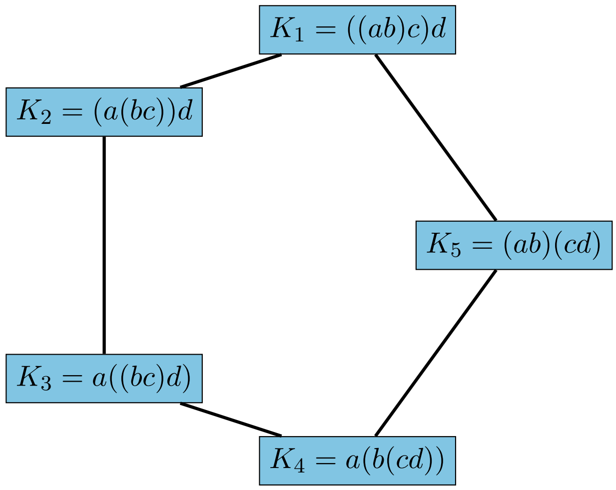
$$K_1 = ((ab)c)d, \quad K_2 = (a(bc))d, \quad K_3 = a((bc)d), \quad K_4 = a(b(cd)), \quad K_5 = (ab)(cd),$$

wobei wir das Multiplikationszeichen der Übersichtlichkeit halber weglassen. Nun kann man mithilfe von (1) zeigen, dass alle fünf Klammerungen übereinstimmen.

a) Untersuchen Sie, welche Gleichheit wir zeigen, wenn wir $x = ab$, $y = c$ und $z = d$ in (1) einsetzen.

b) Geben Sie Elemente an, die wir (1) einsetzen können, um die Gleichheit $K_4 = K_5$ zu zeigen.

c) Beweisen Sie $K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = K_5$.



Kladde

Kladde