Name/Vorname	MtkNr/PO	*Aufgabe*	A_1	A_2	A_3	A_4	Σ
		max.	10	10	10	12	42
		err.					

Aufgabe 1

a) Man zeige für alle reellen Zahlen a, b :

$$max\{a,b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2} \quad und \quad min\{a,b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}$$

b) Man berechne $max\{a,b\} \cdot min\{a,b\}$.

Schmierpapier zur Aufgabe 1

Teil a) 6 Punkte

Seien $a, b \in \mathbb{R}$

1. Fall: $max\{a,b\} = a$.

Dann gilt $a \geq b$. Also gilt $a - b \geq 0$, also $(*)$ $a - b = |a-b|$

Damit gilt

$$max\{a,b\} = a = \frac{2a}{2} = \frac{a+b-b+a}{2} = \frac{a+b+a-b}{2} \underset{(*)}{=} \frac{a+b+|a-b|}{2}$$

2. Fall: $max\{a,b\} = b$.

Dann gilt $b \geq a$. Also gilt $a - b \leq 0$, also $(*) b - a = -(a-b) = |a-b|$

Damit gilt

$$max\{a,b\} = b = \frac{2b}{2} = \frac{b+a-a+b}{2} = \frac{a+b+(b-a)}{2} \underset{(*)}{=} \frac{a+b+|a-b|}{2}$$

1. Fall: $min\{a,b\} = a$.

Dann gilt $a \leq b$. Also gilt $a - b \leq 0$, also $(*)$ $b - a = |a-b|$

Damit gilt

$$min\{a,b\} = a = \frac{2a}{2} = \frac{a+b-b+a}{2} = \frac{a+b+a-b}{2} = \frac{a+b-(b-a)}{2} \underset{(*)}{=} \frac{a+b-|a-b|}{2}$$

2. Fall: $min\{a,b\} = b$.

Dann gilt $b \leq a$. Also gilt $a - b \geq 0$, also $(*)$ $a - b = |a-b|$

Damit gilt

$$min\{a,b\} = b = \frac{2b}{2} = \frac{b+a-a+b}{2} = \frac{a+b-(a-b)}{2} \underset{(*)}{=} \frac{a+b-|a-b|}{2}$$

Teil b) 4 Punkte

Nur : $max\{a,b\} \cdot min\{a,b\} = a \cdot b$. Dann eine Begründung nach dem Motto ...

oder:

$$\begin{aligned}
&(1) & max\{a,b\} \cdot min\{a,b\} &= \frac{a+b+|a-b|}{2} \cdot \frac{a+b-|a-b|}{2} \\
&(2) & &= \frac{(a+b)^2 - |a-b|^2}{4} \\
&(3) & &\underset{|a|^2=a^2}{=} \frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4} \\
&(4) & &= \frac{a^2+2ab+b^2-(a^2-2ab+b^2)}{4} \\
&(5) & &= \frac{2ab-(-2ab)}{4} \\
&(6) & &= \frac{4ab}{4} \\
&(7) & &= ab
\end{aligned}$$

Reinschrift zur Aufgabe 1

AUFGABE 2

Man zeige durch einen $\varepsilon - n_0$ Beweis, dass die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\dfrac{2n+1}{n+2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Schmierpapier zur Aufgabe 2

Beh.: Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \left\{\dfrac{2n+1}{n+2}\right\} = 2$, d.h.:

$$\boxed{z.z.: \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}_{>n_0} : \left|\frac{2n+1}{n+2} - 2\right| < \varepsilon}$$

Bew.:

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$.

Wähle $n_0 := \left\lceil \dfrac{3}{\varepsilon} \right\rceil$.

Dann ist $n_0 \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > n_0$.

Dann gilt:

$$\left|\frac{2n+1}{n+2} - 2\right| = \left|\frac{2n+1-(2n+4)}{n+2}\right| =$$

$$= \left|\frac{1-4}{n+2}\right| = \left|\frac{-3}{n+2}\right| = \frac{3}{n+2} < \frac{3}{n} < \frac{3}{n_0} =$$

$$= \frac{3}{\left\lceil \frac{3}{\varepsilon} \right\rceil} \leq \frac{3}{\frac{3}{\varepsilon}} = \varepsilon,$$

also ingesamt

$$\left|\frac{2n+1}{n+2} - 2\right| < \varepsilon$$

Reinschrift zur Aufgabe 2

Aufgabe 3

Man zeige durch einen $\varepsilon - \delta$ Beweis, dass jede lineare Funktion f gegeben durch $f(x) = m \cdot x + b$ mit $m, b \in \mathbb{R}$ und $m \neq 0$, an jeder Stelle $a \in \mathbb{R}$ ihres Definitionsbereiches gegen den Funktionswert an dieser Stelle konvergiert, d.h.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Schmierpapier zur Aufgabe 3

Bew.:

Sei f eine lineare Funktion geg. durch $f(x) = m \cdot x + b$ mit $m, b \in \mathbb{R}$ und $m \neq 0$.

Sei $a \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{z.z.: \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}\ \forall x \in U_{a_\delta}:\ 0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon}$$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$.

Wähle $\delta := \dfrac{\varepsilon}{|m|}$.

Dann ist $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$.

Sei $x \in U_{a_\delta}$ und es gelte

$0 < |x - a| < \delta$

Dann gilt:

$$|f(x) - f(a)| = |mx + b - (ma + b)| = |mx + b - ma - b| = |m(x - a)| = |m| \cdot |x - a| <$$

$$< |m| \cdot \delta = |m| \cdot \frac{\varepsilon}{|m|} < \varepsilon$$

Reinschrift zur Aufgabe 3

AUFGABE 4

Zur Erinnerung: Es gilt $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ und in jedem reellen Intervall findet man sowohl rationale als auch irrationale Zahlen.

Sei $f : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$ mit $x \mapsto f(x) := \begin{cases} 0, & \textit{für} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 1, & \textit{für} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ eine Funktion.

a) Man untersuche f auf Injektivität.

Seien $x = 0$ und $y = 1$. Dann sind $x, y \in \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ und $x \neq y$.
Dafür gilt: $f(x) = 0 = f(y)$.
Also gibt es zu *einem* Bild unter f *zwei* verschiedene Urbilder, damit ist f nicht injektiv.

b) Man untersuche f auf Surjektivität.

Nach Definition von f nimmt die Funktion nur zwei Bilder an, nämlich 0 oder 1.
<u>1. Fall. $y = 0$.</u> Dann wähle $x = 0$. Dann ist $x \in \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.
Daher gilt $f(x) = f(0) = 0 = y$.
<u>2. Fall. $y = 1$.</u> Dann wähle $x = \pi$. Dann ist $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.
Daher gilt $f(x) = f(\pi) = 1 = y$.
Also gibt es zu jedem Bild unter f ein Urbild, damit ist f surjektiv auf $\{0, 1\}$.

c) Man beweise, dass für alle $a \in \mathbb{R}$ der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ nicht existiert.

Sei $a \in \mathbb{R}$.
Wir nehmen an, dass ein Grenzwert $g \in \mathbb{R}$ existiert, also dass gilt:

$$\boxed{\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}\ \forall x \in U_{a_\delta} :\ 0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - g| < \varepsilon}$$

Also gibt es für $\varepsilon := \frac{1}{2} \in \mathbb{R}_{>0}$ eine positive reelle Zahl δ so, dass für alle $x \in U_{a_\delta}$ mit $0 < |x - a| < \delta$ folgt

$$(*) \quad |f(x) - g| < \frac{1}{2}$$

In der $\delta-$Umgebung von a gibt es stets eine rationale Zahl q so, dass aus $(*)$ folgt:

$$|f(q) - g| \underset{\textit{Def. von } f}{=} |0 - g| = -(-g) = g \underset{i)}{<} \frac{1}{2}$$

In der $\delta-$Umgebung von a gibt es aber auch stets eine irrationale Zahl p so, dass aus $(*)$ folgt:

$$|f(p) - g| \underset{\textit{Def. von } f}{=} |1 - g| < \frac{1}{2},$$

daraus folgt:

$$|1 - g| < \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad |g - 1| < \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \underset{ii)}{<} g < \frac{3}{2}$$

Aus $ii)$ und $i)$ ergibt sich der Widerspruch: $\frac{1}{2} < g < \frac{1}{2}$.

Reinschrift zur Aufgabe 4