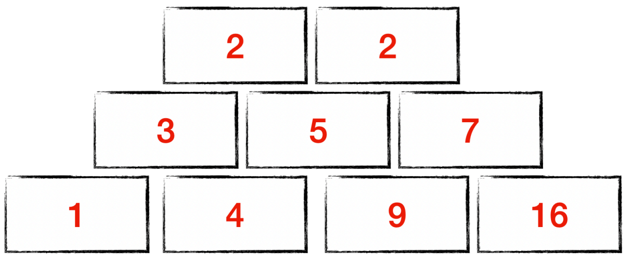
ÜBUNG 13

Ein Teil der Aufgaben wird am Mittwoch in der Vorlesung exemplarisch gemeinsam besprochen, insbesondere jene, die etwas anspruchsvoller sind. Andere Aufgaben sind zur eigenständigen Bearbeitung gedacht. Die Aufgaben sind bewusst knapp formuliert und stellen ein Potpourri aus verschiedenen thematischen Kontexten von Termen und Gleichungen dar. Auch wenn sie teilweise kurz erscheinen, erfordern sie ein genaues Nachdenken und ein gutes Verständnis der besprochenen Inhalte.

AUFGABE 1

Wir betrachten die folgende quadratische Differenz-Zahlenmauer:



a) Bestätigen Sie am Beispiel der Zahlen $5^2 = 25$ und $6^2 = 36$, dass auch bei einer Verlängerung der untersten Zeile die Differenzen in der obersten Zeile nur noch die Zahl 2 annehmen. Eine solche Zahlenmauer nennen wir eine *konstante Differenz-Mauer* (mit Wert 2).

b) Zeigen Sie, dass auch eine kubische Differenz-Zahlenmauer von 1^3 bis zur Zahl 5^3 eine konstante Differenz-Mauer ist. Beweisen Sie, dass diese Differenz auch bei der Verwendung weiterer Kubikzahlen auftreten muss.

c) Betrachten Sie weitere Differenz-Zahlenmauern mit höheren Exponenten und entdecken (und begründen) Sie deren Konstanz (Wert?)

Aufgabe 2

Beweisen Sie durch Termumformungen folgende Gleichheiten - dabei seien a und b stets reelle Zahlen

a) $a^6 - a^2 = a^2(a+1)(a-1)(a^2+1)$

b) $12a^3 - 12a^2b + 3ab^2 = 3a(2a-b)^2$

Aufgabe 3

Vereinfachen Sie das Produkt

$$(1+\frac{1}{2}) \cdot (1+\frac{1}{3}) \cdot (1+\frac{1}{4}) \cdot \ldots \cdot (1+\frac{1}{2025})$$

Aufgabe 4

Formalisieren und beweisen Sie algebraisch den folgenden „Rechentrick“, den Franz so erklärt: „Um das Ergebnis einer zweistelligen Zahl n multipliziert mit der Zahl 11 zu erhalten, brauche ich nur die Summe der beiden Ziffern von n zwischen den Ziffern schreiben, ich habe es bei $35 \cdot 11$ probiert und es klappt: 3 8 5!“
Betrachten Sie auch die Sonderfälle und „korrigieren“ ggf. den Rechentrick.

Aufgabe 5

Entscheiden Sie durch passende Umformungen für folgende Terme, ob diese eine natürliche Zahl darstellen.

a) $(\sqrt{18} + \sqrt{8})^2$

b) $(\sqrt{2} + \sqrt{1})^2$

c) $(\sqrt{2} + \sqrt{1})^{16}$

d) $\sqrt{(15 + \sqrt{104}) \cdot (15 - \sqrt{104})}$

Aufgabe 6

Untersuchen Sie, ob es einen Wert für den Parameter a gibt, für den die Gleichung

$$(ax + 1) \cdot (x + a) - (ax - 3) \cdot (x + 2a) = 2 \cdot (3 + 2a)$$

folgende Lösungsmenge L besitzt:

a) $L = \emptyset$

b) $L = \mathbb{R}$

c) $L = \{0\}$

d) $L = \{1\}$

Aufgabe 7

Seien x, y reelle Zahlen und sei ein Term $T(x, y)$ definiert durch

$$T(x, y) = 2x^2 + 4y^2 - 4xy - 4y + 3$$

a) Bestimmen Sie $T(0, 0)$, $T(-2, 2)$, $T(-1, 5)$ und $T(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

b) Bestimmen Sie $T(x, y)$ für den Fall, dass y halb so groß ist wie x (dass x halb so groß ist wie y)

c) Beweisen Sie, dass für $x = y$ stets $T(x, y) > 0$ gilt.

d) Beweisen Sie, dass $T(x, y)$ nach unten beschränkt ist und gebe den kleinsten Wert von $T(x, y)$ an. Dabei heißt hier nach unten beschränkt: Es gibt eine reelle Zahl u so, dass für alle x, y gilt $T(x, y) \geq u$.

Aufgabe 8

Lösen Sie die Aufgabe ohne Gleichungsumformungen. Die Schüler:innen einer Klasse spielen Handball. Es spielen $\frac{3}{5}$ der Jungen und $\frac{3}{4}$ der Mädchen der Klasse, die restlichen schauen zu. Auf dem Spielfeld sind gleich viel Jungen und Mädchen. Bei den Zuschauern sind drei Mädchen weniger als Jungen. Wie viele Kinder sind in der Klasse?

AUFGABE 9

Sei p eine reelle Zahl und sei $(p-1)\cdot x^2 - 2(p+1)\cdot x + p + 1 = 0$. Dann gilt

$$|L| = 1 \Leftrightarrow p \in \{-1, 1\}.$$

AUFGABE 10

Untersuchen Sie, für welche reellen Zahlen a die Gleichung

$$(x^2 - a)\cdot(x^2 + 2ax - a) = 0$$

a) keine

b) genau eine

c) genau zwei

d) genau drei

e) mehr als drei

reelle Lösung(-en) hat?

AUFGABE 11

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Wurzelgleichungen durch eine Äquivalenzumformung

a) $\sqrt{3x^2+7} = 4x - 5$

b) $\sqrt{3x} - (x+1) = 2 + 5x$

AUFGABE 12

Wie sind die Werte der reellen Parameter a und b zu wählen, damit die Gleichung

$$||x| - a| = b$$

a) keine

b) genau eine

c) genau zwei

d) genau drei

e) genau vier

reelle Lösung(-en) hat?

Aufgabe 13

a) Zeigen Sie, dass für alle reelle Zahlen $a > 0$ die Ungleichung $a + \frac{1}{a} \geq 2$ erfüllt ist. Wann gilt die Gleichheit?

b) Zeigen Sie, dass für alle reelle Zahlen a die Ungleichung $a < a^2 + \frac{1}{3}$ erfüllt ist

c) Zeigen Sie, dass für alle reellen Zahlen a, b die Ungleichung $a + b \leq a^2 + b^2 + \frac{1}{2}$ erfüllt ist.

d) Zeigen Sie, dass für alle nichtnegativen Zahlen a, b, c mit $a + b + c = 1$ die Ungleichung $\frac{1}{3} \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq 1$ erfüllt ist.

e) Zeigen Sie, dass für alle positiven Zahlen a, b, c mit $a \cdot b \leq 1$ die Ungleichung $\frac{a}{b} + \frac{1}{a} \geq a + 1$ erfüllt ist.

f) Zeigen Sie, dass für alle reellen Zahlen a die Ungleichung $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} \geq 2$. Man verwende a).