ÜBUNG 5

AUFGABE 1

Seien A und B irgendwelche Aussagen. Wir betrachten nun zunächst eine Aussage der Form

$$(*) \quad ((A \Rightarrow X) \Rightarrow Y) \Rightarrow Z,$$

wobei hier die Variablen X, Y und Z wieder eine der Aussagen A oder B sind, also mit $X, Y, Z \in \{A, B\}$. Betrachten wir nun für eine Konkretisierung die Belegung der Variablen in $(*)$ mit $X = Y = Z = A$, so wird aus obiger Aussage sofort

$$(1) \quad ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A) \Rightarrow A.$$

Jetzt ist die Frage, ob wir eine Tautologie erfunden haben. Wir prüfen: Ist A eine wahre Aussage, dann können wir mit unserer Kurzschreibweise die Formel transformieren, es gilt dann

$$((w \Rightarrow w) \Rightarrow w) \Rightarrow w.$$

Da wir gemäß unserer Definition für die Implikation festgelegt haben, dass *wenn aus einer wahren Aussage eine wahre Aussage folgt* eine wahre Aussage ist (kurz $(w \Rightarrow w) \Leftrightarrow w$) können wir nacheinander schreiben

$$\begin{aligned} & ((w \Rightarrow w) \Rightarrow w) \Rightarrow w \\ \Leftrightarrow\ & (w \Rightarrow w) \Rightarrow w \\ \Leftrightarrow\ & w \Rightarrow w \\ \Leftrightarrow\ & w \end{aligned}$$

Das war die erste Tat. Jetzt nehmen wir an, dass die Aussage A eine falsche Aussage ist. Das können wir auch so $A \Leftrightarrow f$ schreiben. Dann transformiert sich die obige Formel zu

$$((f \Rightarrow f) \Rightarrow f) \Rightarrow f.$$

Da wir gemäß unserer Definition für die Implikation festgelegt haben, dass *wenn aus einer falschen Aussage eine falsche (oder auch wahre) Aussage folgt* stets eine wahre Aussage ist (kurz $(f \Rightarrow f/w) \Leftrightarrow w$) können wir nun nacheinander schreiben

$$\begin{aligned} & ((f \Rightarrow f) \Rightarrow f) \Rightarrow f \\ \Leftrightarrow\ & (w \Rightarrow f) \Rightarrow f \\ \Leftrightarrow\ & f \Rightarrow f \\ \Leftrightarrow\ & w \end{aligned}$$

So, nun haben wir mit unserer Analyse der Formel $((A \Rightarrow X) \Rightarrow Y) \Rightarrow Z$ für den Fall $X = Y = Z = A$ abgeschlossen und können erfreut feststellen, dass sie eine Tautologie ist, prima. Ehrlich gesagt, sagt uns schon der gesunde Menschenverstand, dass hier eine Tautologie vorliegt, oder? Aber sicher ist sicher ... Jetzt existieren durch Belegung der Variablen X, Y, Z mit A, B in $(*)$ noch sieben weitere Fälle, die Sie gern als Übung im obigen Sinn bearbeiten dürfen, also stellen wir uns die Frage: Welche der sieben übrig gebliebenen Formeln (2),(3),...,(8) sind tautologisch, welche nicht.

AUFGABE 2

Man entscheide, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Es kann direkt auf dem Zettel eingetragen werden.

Man beurteile folgende Aussagen.	wahr	falsch
$\exists x \in \mathbb{N} \ : 5 > x$	☐	☐
$\forall x \in \mathbb{N} \ : x < \sqrt{121}$	☐	☐
$\forall x \in \mathbb{N} \ : x > -\pi$	☐	☐
$\forall x \in \mathbb{N} \ : x + 0,\overline{9} = x + 1$	☐	☐
$\forall x \in \mathbb{Z} \ \exists y \in \mathbb{Z} : y > x$	☐	☐
$\exists y \in \mathbb{Z} \ \forall x \in \mathbb{Z} : y > x$	☐	☐
$\forall x \in \mathbb{R} \ \exists y \in \mathbb{R} : x^2 = y$	☐	☐
$\forall y \in \mathbb{R} \ \exists x \in \mathbb{R} : x^2 = y$	☐	☐
$\forall y \in \mathbb{R} \ \exists x \in \mathbb{R} : x + y = 0$	☐	☐
$\exists x \in \mathbb{R} \ \forall y \in \mathbb{R} : x + y = 0$	☐	☐
$\forall y \in \mathbb{Z} \ \exists x \in \mathbb{N} : y \cdot x = x^2$	☐	☐
$\forall x \in \mathbb{R} \ \exists y \in \mathbb{R} : x \cdot \frac{1}{y} = 1$	☐	☐

Aufgabe 3

Ein Projekt wird als *ausgewogen* bezeichnet, wenn jede Aufgabe von mindestens einem Teammitglied erledigt wurde. Ein Projekt wird als *einfach* bezeichnet, wenn es mindestens ein Teammitglied gibt, das alle Aufgaben erledigt.

a) Ist jedes einfache Projekt auch ausgewogen?

b) Ist jedes ausgewogene Projekt auch einfach?

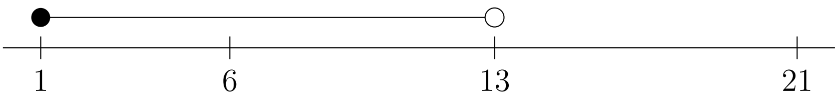
Es wird natürlich eine kurze Begründung erwartet.

Aufgabe 4

In dieser Aufgabe möchten wir Intervalle detaillierter studieren. Ein Intervall I ist eine Teilmenge $I \subseteq \mathbb{R}$, die aus allen Zahlen besteht, die zwischen zwei Grenzen liegen. Die Grenzen können in das Intervall eingeschlossen oder aus dem Intervall ausgeschlossen werden, so dass für eine untere Grenze $c \in \mathbb{R}$ und eine obere Grenze $d \in \mathbb{R}$ vier Arten Intervalle entstehen:

- das offene Intervall $(c, d) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } c < x \text{ und } x < d\}$;
- das halboffene Intervall $[c, d) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } c \leq x \text{ und } x < d\}$;
- das halboffene Intervall $(c, d] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } c < x \text{ und } x \leq d\}$;
- das abgeschlossene Intervall $[c, d] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } c \leq x \text{ und } x \leq d\}$.

In der gesamten Aufgabe setzen wir $I = [1, 13)$ und $J = (6, 21]$.



Das Bild zeigt das halboffene Intervall I als Teilmenge der Zahlengeraden, wobei der gefüllte Kreis für die eingeschlossene untere Grenze und der nicht gefüllte Kreis für die ausgeschlossene obere Grenze stehen mögen.

a) Man zeichne das Intervall J in die Skizze ein und beschreibe $I \cap J$, $I \cup J$ und $I \setminus J$ als Intervalle.

Ben behauptet: „Das Intervall I besitzt ein kleinstes Element.“ Bens Aussage ist natürlich WAHR, schließlich ist 1 die kleinste Zahl des Intervalls. In Formeln ausgedrückt bedeutet dies: $\forall y \in I \colon 1 \leq y$. Bens gesamte Aussage lässt sich also in der folgenden Formel schreiben: $\exists x \in I \colon \forall y \in I \colon x \leq y$.

b) Dora behauptet: „Das Intervall J besitzt ein größtes Element.“ Man schreibe Doras Behauptung als Formel und gebe an, ob Dora recht hat.

c) Poyraz behauptet: „Das Intervall J besitzt kein kleinstes Element.“ Man schreibe Poyraz’ Behauptung als Formel und gebe an, ob Poyraz recht hat.

d) Michael Maniac behauptet: „Es gibt ein rechtwinkliges Dreieck mit Katheten der Länge a und b und einer Hypotenuse der Länge 25, sodass $a \in I$ und $b \in J$.“ Man schreibe Michael Maniacs Behauptung als Formel. Zudem prüfe man seine Behauptung.

Aufgabe 5

Zwei Geschwister erhalten ein wöchentliches Taschengeld gemäß der Familienregel: „Ein Kind bekommt halb so viel Taschengeld, wie es alt ist.“ Theodor ist 6 Jahre alt und bekommt jede Woche 3 Euro. Seine große Schwester Ida ist 8 Jahre alt.

a) Man fülle die Lücke: Ida bekommt jede Woche _____ Euro Taschengeld.

Die Geschwister haben ihr Taschengeld 3 Wochen lang gespart. Somit befinden sich in Theodors Kinderportemonnaie genau $3 \cdot 3 = 9$ Euro.

b) Man fülle die Lücke: Ida hat genau _____ Euro in ihrem Portemonnaie.

Ida und Theodor legen ihr erspartes Taschengeld zusammen, um ein Paket Klemmbausteine zu kaufen, das als Motiv den Krieg der Sterne hat und 11 Euro kostet. Wir modellieren den Betrag, den Theodor zum Kauf beisteuert, symbolisch durch eine Variable a. Aufgrund des begrenzten Budgets ist a keine beliebige Zahl, sondern ein Element der Menge $A = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$, wobei wir der Einfachheit halber annehmen, dass jedes Kind einen ganzzahligen Betrag gibt. Entsprechend modellieren wir Idas Beitrag durch eine Variable b und ihr Budget durch eine Menge B.

c) Man fülle die Lücke: Es ist $B =$ ________________________.

Die Kaufbedingung modellieren wir als die Aussage

$$K(a, b)\colon a + b = 11.$$

Nun möchten wir Aussagen studieren, welche wir formalisieren, formulieren, interpretieren und beurteilen können. Eine Aussage hat daher verschiedene Inkarnationen, zum Beispiel sind die drei Aussagen (I), (II) und (III) gleichwertig:

(I) [Formalisierung] $\forall a \in A\colon \forall b \in B\colon (K(a, b) \wedge (b = 6)) \Rightarrow (a = 5)$.

(II) [Formulierung] Wenn zwei Zahlen $a \in A$ und $b \in B$ sowohl die Gleichung $a + b = 11$ als auch die Gleichung $b = 6$ erfüllen, dann ist $a = 5$.

(III) [Interpretation] Wenn Ida zum Kauf des Paketes 6 Euro beisteuert, so muss Theo einen Restbetrag von 5 Euro bezahlen.

d) Man beurteile, ob die Ausagen (I), (II) und (III) WAHR oder FALSCH sind.

e) Man formuliere, interpretiere und beurteile die folgende formale Aussage:

$$\exists a \in A\colon \exists b \in B\colon K(a, b).$$

f) Man formalisiere, formuliere und beurteile die folgende interpretative Aussage von Theodor zu Ida: „Wenn ich 4 Euro gebe und Du den Rest, dann haben wir beide nach dem Kauf gleich viel Geld übrig.“

g) Man erfinde eine Aussage und schreibe sie in verschiedenen Varianten auf.