ÜBUNG 9

Es wird zeitgleich das neue online Übungsblatt 7 (Grund) zur Verfügung gestellt.

AUFGABE 1

Man ersetze die Sternchen $*$ durch Ziffern aus der Menge $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ so, dass die Rechnung korrekt ist.

$$\begin{array}{rr} & 624 \\ + & *** \\ \hline & 975 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 2341 \\ + & *4* \\ \hline & 24*5 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 5*9 \\ + & *2* \\ \hline & 932 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & *24 \\ & 33 \\ + & 6*6 \\ \hline & 197* \end{array}$$

AUFGABE 2

Sicher kennen Sie die folgende Art von Aufgaben, man spricht von *Kryptogrammen*, diese sind eine mathematische Gleichung mit unbekannten Zahlen, deren Ziffern durch Buchstaben ersetzt wurden. In jeder der Aufgaben ist für jeden Buchstaben genau eine Ziffer aus der Menge $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ zu setzen, zu verschiedenen Buchstaben gehören verschiedene Ziffern. Bestimmen Sie nun eine Ersetzung der Buchstaben durch Ziffern so, dass sich eine korrekte Rechnung ergibt. Denken Sie an die eventuellen Überträge. Es können auch mehrere Lösungen passen.

$$\begin{array}{rr} & \text{O K} \\ + & \text{K O} \\ \hline & \text{WOW} \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & \text{D U} \\ + & \text{L U C} \\ \hline & \text{A S S} \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & \text{C H A R} \\ - & \text{L O T T} \\ \hline & 2\ 0\ 1\ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & \text{M O R D} \\ + & \text{R A U B} \\ \hline & \text{K R I M I} \end{array}$$

AUFGABE 3

Man berechne die folgenden Aufgaben durch ein schriftliches stellengerechtes Verfahren in den angegebenen Stellenwertsystemen direkt hier auf dem Zettel.

- ... im 10er-System

$$\begin{array}{rr} & 17 \\ + & 441 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 4305 \\ + & 3905 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 432 \\ + & 653 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 4305 \\ + & 345 \\ \hline \end{array}$$

- ... im 4er-System

10_4	333_4	1010_4	123_4
$+\ 32_4$	$+\ 3333_4$	$+\ 10101_4$	$+\ 123123_4$

- ... im 7er-System

45_7	10506_7	343_7	6666_7
$+\ 21_7$	$+\ 10506_7$	$+\ 143_7$	$+\ 66666_7$

- ... im 10er-System

555	4534	4352	794511
$-\ 441$	$-\ 2219$	$-\ 2099$	$-\ 18789$

- ... im 5er-System

10_5	34_5	1010_5	1344_5
$-\ 4_5$	$-\ 23_5$	$-\ 101_5$	$-\ 243_5$

- ... im 7er-System

45_7	100_7	3333_7	666666_7
$-\ 21_7$	$-\ 66_7$	$-\ 666_7$	$-\ 66666_7$

Aufgabe 4

In dieser Aufgabe wollen wir uns nur im 6er-System (auch als Hexärsystem bekannt) aufhalten und uns an das Rechnen mit Plus $+_6$ und Minus $-_6$ nur mit den Ziffern $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ gewöhnen. Zählen können wir schon, also etwa so

10er-System	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
6er-System	0	1	2	3	4	5	10	11	12	13	14	15	20	21	22	23	23	...

Das 6er System tritt u.a. in der Natur auf, beispielsweise sind die Blütenanzahl einiger Planzen ein Vielfaches der Zahl 6 oder auch Bienenwaben haben eine 6-eckige symmetrische Struktur.



Meistens hängen diese Phänomene mit der Teilung eines Vollkreises zusammen, denn es gilt ja $6 \cdot 60° = 360°$. Das bekannteste Beispiel ist das babylonische Sexagesimalsystem (also zur Basis 60), das in der Astronomie und Zeitmessung noch heute Spuren hinterlassen hat (z.B. 60 Sekunden pro Minute, 60 Minuten pro Stunde).
Vervollständigen Sie für die nachfolgenden Aufgaben zunächst die Additionstabelle und die Multiplikationstabelle für das 6er-System:

$+_6$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2		4	5	10
2	2		4			11
3	3		5			
4	4			11		
5	5			12		

$\cdot_6$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1		3	4	
2	0		4			14
3	0		10			
4	0			20		
5	0		14	23		

Nutzen Sie die obige Tabelle, um die folgenden schriftlichen Berechnungen im 6er-System durchzuführen. Schreiben Sie Ihre Rechnungen so ausführlich wie wir im Beispiel unten aufgezeigt haben. Exemplarisch ist die Anwendung der Tabelle für den ersten Rechenschritt

$$5_6 \cdot 3_6 = 23_6$$

farblich dargestellt. Versuchen Sie alle Rechnungen nur im 6er-System durchzuführen, d.h. ohne innerlich ins 10er-System zu wechseln.

- Beispiel für eine schriftliche Berechnung von $123_6 \cdot 45_6 = 10503_6$

ausführliche Notation:

	$123_6 \cdot 45_6$					
				2	3	$= 5 \cdot 3$
+			1	4	0	$= 5 \cdot 2$
+			5	0	0	$= 5 \cdot 1$
+			2	0	0	$= 4 \cdot 3$
+		1	2	0	0	$= 4 \cdot 2$
+		4	0	0	0	$= 4 \cdot 1$
	1	0	5	0	3	

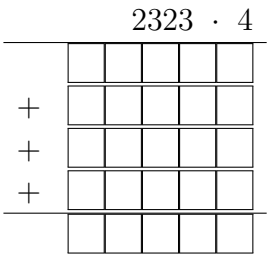
bzw. die verkürzte Notation:

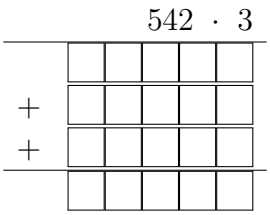
	$123_6 \cdot 45_6$				
				2	3
+			1	4	
+			5		
+			2	0	
+		1	2		
+		4			
	1	0	5	0	3

- Bearbeiten Sie nun die folgenden vier Multiplikationsaufgaben schriftlich im obigen Sinn (hier auf dem Zettel).

a)

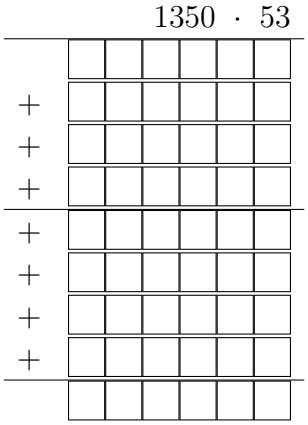
c)

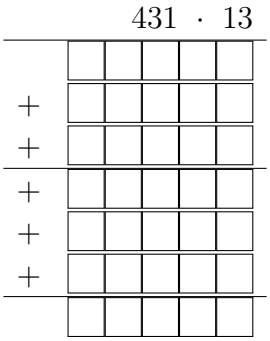




d)

b)





Aufgabe 5

Wir beginnen mit einem neuen Verfahren für eine schriftliche Multiplikation. Wir möchten gern

$$18 \cdot 13$$

berechnen.
Wir geben es offen zu: Das Ergebnis selbst haut vielleicht niemanden vom Hocker – aber der Weg dorthin? Der hat auf jeden Fall seinen Unterhaltungswert!
Es wird folgendes Verfahren in drei Schritten angeboten:

1. Schreibe die beiden Zahlen 18 und 13 nebeneinander auf (siehe Tabelle) und beginne mit der **Division durch 2** mit den Zahlen der linken Spalte, und

der **Multiplikation mit 2** mit den Zahlen der rechten Spalte. Natürlich sind nicht immer alle Zahlen durch 2 teilbar. Ist eine Zahl ungerade, so runden wir das Ergebnis ganzzahlig ab; die Klammern $\lfloor\ \rfloor$ stehen für dieses Abrunden. In der dritten Rechenzeile lesen wir also $\lfloor 9 : 2 \rfloor = 4$. Das Verfahren bricht ab, wenn in der linken Ergebnisspalte die Zahl 1 herauskommt.

Rechnung	: 2	Rechnung	· 2
	18		13
$\lfloor 18 : 2 \rfloor =$	9	$13 \cdot 2 =$	26
$\lfloor 9 : 2 \rfloor =$	4	$26 \cdot 2 =$	52
$\lfloor 4 : 2 \rfloor =$	2	$52 \cdot 2 =$	104
$\lfloor 2 : 2 \rfloor =$	1	$104 \cdot 2 =$	208

2. **Streiche** nun alle Zeilen, in denen in der linken Ergebnisspalte (: 2) eine **gerade Zahl** steht, also in unserem Beispiel die Zeilen, in denen die 18, die 4 und die 2 steht:

Rechnung	: 2	Rechnung	· 2
	~~18~~		~~13~~
$\lfloor 18 : 2 \rfloor =$	9	$13 \cdot 2 =$	26
$\lfloor 9 : 2 \rfloor =$	~~4~~	$26 \cdot 2 =$	~~52~~
$\lfloor 4 : 2 \rfloor =$	~~2~~	$52 \cdot 2 =$	~~104~~
$\lfloor 2 : 2 \rfloor =$	1	$104 \cdot 2 =$	208

3. **Addiere** die übrig gebliebenen Ergebnisse in der ganz rechten Spalte:

$$26 + 208 = 234$$

Bei diesem Verfahren erhalten wir als Ergebnis von $18 \cdot 13$

234.

Dies können Sie ruhig nachrechnen, es stimmt!

Jetzt sind Sie gefragt! Wenden Sie das Verfahren bei den drei folgenden Multiplikationsaufgaben an – direkt in den vorbereiteten Tabellen auf diesem Blatt. (Nicht in jeder Tabelle werden alle Zeilen gebraucht.) Dabei werden sicher einige Fragen aufkommen, vor allem eine besonders entscheidende: Warum führt dieses Verfahren zum richtigen Ergebnis? Genau dieser Frage werden wir uns auf dem nächsten Übungsblatt widmen.

a) $23 \cdot 12 =$ $\square$

Rechnung	: 2	Rechnung	· 2
	23		12
$\lfloor 23 : 2 \rfloor =$		$12 \cdot 2 =$	
$\lfloor \quad : 2 \rfloor =$		$\cdot 2 =$	
$\lfloor \quad : 2 \rfloor =$		$\cdot 2 =$	
$\lfloor \quad : 2 \rfloor =$		$\cdot 2 =$	
$\lfloor \quad : 2 \rfloor =$		$\cdot 2 =$	
$\lfloor \quad : 2 \rfloor =$		$\cdot 2 =$	

b) $32 \cdot 19 =$ $\square$

Rechnung	: 2	Rechnung	· 2
	32		19
$\lfloor 32 : 2 \rfloor =$		$19 \cdot 2 =$	
$\lfloor \quad : 2 \rfloor =$		$\cdot 2 =$	
$\lfloor \quad : 2 \rfloor =$		$\cdot 2 =$	
$\lfloor \quad : 2 \rfloor =$		$\cdot 2 =$	
$\lfloor \quad : 2 \rfloor =$		$\cdot 2 =$	
$\lfloor \quad : 2 \rfloor =$		$\cdot 2 =$	

c) $135 \cdot 24 =$ $\square$

Rechnung	: 2	Rechnung	· 2
	135		24
$\lfloor 135 : 2 \rfloor =$		$24 \cdot 2 =$	
$\lfloor \quad : 2 \rfloor =$		$\cdot 2 =$	
$\lfloor \quad : 2 \rfloor =$		$\cdot 2 =$	
$\lfloor \quad : 2 \rfloor =$		$\cdot 2 =$	
$\lfloor \quad : 2 \rfloor =$		$\cdot 2 =$	
$\lfloor \quad : 2 \rfloor =$		$\cdot 2 =$	
$\lfloor \quad : 2 \rfloor =$		$\cdot 2 =$	

Aufgabe 6

Wambon ist eine in der indonesischen Region Papua gesprochene Sprache mit einem spannenden Zahlsystem. Das ist kein additives Stellenwertsystem, sondern funktioniert ein wenig anders. Im Folgenden ist das 'kleine 1×3' also

$$3 \times 1 = 3, \quad 3 \times 2 = 6, \quad \ldots, \quad 3 \times 9 = 27.$$

in zufälliger Reihenfolge auf Wambon angegeben:

$$takhem \times ambalop = emkelop, \qquad takhem \times muyop = emhitulop,$$

$$takhem \times hitulop = silutop, \qquad takhem \times sanop = takhem,$$

$$takhem \times javet = emsanop, \qquad takhem \times sanopkunip = kumuk,$$

$$takhem \times kumuk = emalin, \qquad takhem \times takhem = javet,$$

$$takhem \times mben = emben.$$

a) Ordnen Sie den Gleichungen ihr Äquivalent in Ziffern zu. Es reicht, die Gleichungen in arabischen Zahlen über die in Wambon zu schreiben, Begründungen sind hier nicht nötig.

b) Schreibt in Ziffern (keine Begründung nötig):

$$(emnggokmit + nggokmit) \div sanopkunip = kalit, \qquad emambalop - emjavet = hitulop.$$

Tipp: Die Römer hatten zum Beispiel ein Zahlensystem, das nicht additiv ist, sondern auch subtraktive Elemente hat, z.B: wurde dort die 11 als XI, also quasi '10+1' geschrieben, die 9 aber als IX, also als '1 weniger als 10'