ÜBUNG 9

Abgabe der Bearbeitungen am Freitag, den 24. November bis 10 Uhr

AUFGABE 1
Sei $N := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Sei T eine Teilmenge von $N \times N$ für die genau 4 der 6 wesentlich voneinander verschiedenen Aussagen, die durch alle möglichen Quantorisierungen der Aussage $(x, y) \in T$ entstehen, wahr sind.
Welche 4 Aussagen können das dann nur sein?(Es gibt zwei Möglichkeiten.)
Man gebe konkret eine solche Teilmenge T so an, für die auch tatsächlich genau 4 Quantorisierungen der Aussage $(x, y) \in T$ wahr sind.
Man behandele abschließend dieselbe Fragestellung für $N = \mathbb{N}$.

AUFGABE 2
Man widerlege folgende Existenzaussagen.

a) Es gibt ungerade Zahlen a und b so, dass $4 \mid 3a^2 + 7b^2$.

b) Es gibt eine reelle Zahl x so, dass $x^6 + x^4 + 1 = 2x^2$.

c) Es gibt eine Zahl n so, dass $n^4 + n^3 + n^2 + n$ ungerade ist.

AUFGABE 3
Man beweise oder widerlege. Seien A, B, C, D Mengen, dann gilt:

a) $A \cup B = A \cup C \quad \Leftrightarrow \quad A \cap B = A \cap C$.

b) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$.

c) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

AUFGABE 4
Zu den folgenden Aussagen gebe man (a) einen direkten Beweis und (b) einen Beweis durch Widerspruch an.

i) Für alle positiven reellen Zahlen x mit $x - \frac{2}{x} > 1$ folgt $x > 2$.

ii) Für alle nichtnegativen reellen Zahlen folgt aus der Ungleichung $x \leq y$ die Ungleichung $x^2 \leq y^2$.

AUFGABE 5 (alte Klausuraufgabe)
Man beweise oder widerlege folgende Aussagen:

a) Es existieren vier positive ganzen Zahlen a, b, c und d so, dass $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ gilt.

b) Für alle Mengen A, B gilt: $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.