ÜBUNG 7

Abgabe der Bearbeitungen am Freitag, den 10. November bis 10 Uhr

AUFGABE 1

Seien A und B Aussagen. In der aussagenlogischen Formel

$$((A \Rightarrow \square) \Rightarrow \square) \Rightarrow \square$$

setze man in die Kästchen so die Aussagen A, B ein, dass zwei Tautologien und zwei Nicht-Tautologien entstehen.

AUFGABE 2

Man formalisiere die folgenden Aussagen und beweise sie:

a) Jede ungerade natürliche Zahl lässt sich als Differenz zweier aufeinanderfolgender Quadratzahlen darstellen.

b) Es existiert eine ganze Zahl m so, dass für jede natürliche Zahl n gilt:

$$\left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{2}$$

c) Für alle ungeraden natürlichen Zahlen s gibt es keine natürlichen Zahlen a, b für die gilt:

$$a^2 - b^2 = 2s$$

AUFGABE 3

Man formalisiere und beweise durch Fallunterscheidung.

a) Für alle $z \in \mathbb{Z}$ ist $z^2 - 3z + 9$ eine ungerade Zahl.

b) Für alle $n \in \mathbb{Z}$ ist $n^3 - n$ eine gerade Zahl.

c) Für alle natürlichen Zahlen x mit $x > 6$ existieren positive ganze Zahlen a, b mit $x = 2a+3b$.

AUFGABE 4

Man formalisiere und beweise

a) Wenn ein Produkt zweier ganzer Zahlen ungerade ist, dann ist die Summe der Quadrate der Zahlen gerade.

b) Wenn zwei ganze Zahlen von derselben Parität sind, dann ist das Quadrat der Summe der Zahlen gerade.

c) Wenn sowohl das Produkt als auch die Summe zweier ganzer Zahlen von derselben Parität sind, dann sind beide Zahlen gerade.

AUFGABE 5 (*nicht schriftlich*)
Man mache sich den Satz aus der Vorlesung über elementare Mengenregeln „klar".

Satz 0.1. *Seien A, B und C Mengen. Dann gelten:*

(1) Kommutativ-Regeln
(a) $A \cup B = B \cup A$ *(b)* $A \cap B = B \cap A$

(2) Assoziativ-Regeln
(a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *(b)* $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(3) Distributiv-Regeln
(a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *(b)* $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(4) Regeln von De Morgan
(a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ *(b)* $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

AUFGABE 6
Seien A, B, C Mengen.

a) Man zeige: $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$

b) Man zeige: $A \setminus (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \setminus C$

****
Auf Wunsch folgen nun zwei alte Klausuraufgaben:

AUFGABE K1
Man formalisiere folgende Aussagen und beweise sie:

(a) Es existieren drei Teilmengen A, B und C von $\mathbb{N}$ so, dass $A \cap B = A \cap C$ ist, aber B ungleich C gilt.

(b) Seien A, B und C Mengen.
Wenn $A \cap B = A \cap C$ und $A \cup B = A \cup C$ gilt, dann gilt $B \subseteq C$.

AUFGABE K2

a) Man formalisiere und beweise:
Für alle natürlichen Zahlen $a \geq 1$ gibt es eine reelle Zahl $b \geq 0$ so, dass gilt

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{b-1}{a}.$$

b) Sei M eine Menge. Man formalisiere und beweise:
Es gilt für alle Teilmengen A, B von M: Genau dann, wenn der Schnitt und die Vereinigung der beiden Mengen A, B gleich sind, dann sind auch die Mengen A, B gleich.