Übung 6

Es wird zeitgleich das neue online Übungsblatt zur Verfügung gestellt.

Aufgabe 1

Eine Schülerin macht die folgende Aussage:

> *Wenn ich in diesem Halbjahr sowohl in Mathematik als auch in Physik eine 1 auf dem Zeugnis bekomme, dann melde ich mich im zweiten Halbjahr für die Mathe-AG oder die Theater-AG an.*

Man entscheide für jede der folgenden Situationen, ob diese Aussage wahr oder falsch ist.

a) Die Schülerin bekommt in Mathematik keine 1, meldet sich aber trotzdem für die Mathe-AG an.

b) Die Schülerin bekommt sowohl in Mathematik als auch in Physik eine 1, meldet sich aber für keine AG an.

c) Die Schülerin bekommt in Mathematik keine 1, meldet sich nicht für die Mathe-AG, wohl aber für die Theater-AG an.

d) Die Schülerin bekommt sowohl in Mathematik als auch in Physik eine 1 und meldet sich sowohl für die Mathe-AG als auch für die Theater-AG an.

e) Die Schülerin bekommt weder in Mathematik noch in Physik eine 1 und meldet sich für keine der beiden AGs an.

Aufgabe 2

Sei $n \in S$ mit $S = \{2, 4, 6, 8\}$.
Würde man eine Aussageform $F(n)$ über der Menge S wählen mit

$$F(n) : 2 = n \ \vee \ n > 6$$

würde gelten: $F(2)$ und $F(8)$ sind wahr und $F(4)$ und $F(6)$ sind falsch – begründen Sie dies kurz.

a) Man wähle nun eine Aussageform $T(n)$ über der Menge S, die für genau eine der Zahlen aus S wahr und für die übrigen Zahlen falsch ist.

b) Man wähle nun zwei Aussageformen $P(n)$ und $Q(n)$ so, dass $P(2)$ und $Q(2)$ beide wahr sind, $P(4)$ und $Q(4)$ beide falsch sind, $P(6)$ wahr und $Q(6)$ falsch ist sowie $P(8)$ falsch und $Q(8)$ wahr ist.

Aufgabe 3

In jedem der folgenden Fälle sind zwei Aussageformen $P(x)$ und $Q(x)$ über einer Menge S gegeben. Man bestimme den Wahrheitswert von $P(x) \Rightarrow Q(x)$ für jedes $x \in S$.

a) $P(x) : |x| = 4; \quad Q(x) : x = 4; \quad S = \{-4, -3, 1, 4, 5\}$.

b) $P(x) : x^2 = 16; \quad Q(x) : |x| = 4; \quad S = \{-6, -4, 0, 3, 4, 8\}$.

c) $P(x) : x > 3; \quad Q(x) : 4x - 1 > 12; \quad S = \{0, 2, 3, 4, 6\}$.

Aufgabe 4

Viele kennen die Geschichte von Alice im Wunderland. Im Wald des Vergessens trifft sie den Löwen und das Einhorn. Beide haben eine merkwürdige Eigenschaft: Der Löwe lügt montags, dienstags und mittwochs und spricht an den anderen Tagen die Wahrheit. Das Einhorn lügt donnerstags, freitags und samstags und sagt an den anderen Tagen die Wahrheit. Als Alice nach dem Wochentag fragt, bekommt sie folgende Antworten:
Löwe: „Gestern war einer meiner Lügentage."
Einhorn: „Auch bei mir war gestern ein Lügentag."
An welchem Tag hat Alice die beiden gefragt?

Aufgabe 5

Seien P und Q Aussagen. Man vervollständige die folgende Wahrheitstafel

P	Q	$\neg(Q \wedge P)$	$\neg Q \vee \neg P$	$(P \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow P$	$P \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow P)$
W	W				
W	F				
F	W				
F	F				

Aufgabe 6

Seien $A(x, y)$ und $B(x, y)$ Aussagen und seien die Variablen x, y aus der Menge der ganzen Zahlen. Man gebe bzgl. der Implikation $A(x, y) \Rightarrow B(x, y)$ diejenigen Belegungen der Variablen x, y an, für die die Implikation wahr wird :

1. $A(x, y) : \ x^2 - y^2 = 0$ und $B(x, y) : \ x = y$.
2. $A(x, y) : \ |x| = |y|$ und $B(x, y) : \ x = y$.
3. $A(x, y) : \ x^2 + y^2 \geq 0$ und $B(x, y) : \ x + y = 1$.

Aufgabe 7

Es sei $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Für Teilmengen $T \subseteq X$ betrachten wir die Aussageformen

$$A(T)\colon T \cap \{1, 3, 5\} = \varnothing, \qquad B(T)\colon T \neq \varnothing.$$

a) Verbalisieren Sie die beiden Aussageformen.

b) Bestimmen Sie alle $T \in P(X)$, für die $A(T) \wedge B(T)$ gilt.

c) Bestimmen Sie alle $T \in P(X)$, für die $A(T) \vee \neg B(T)$ gilt.

d) Bestimmen Sie die Mächtigkeit der Menge $\{T \in P(X) \mid \neg A(T)\}$.