ÜBUNG 11

Abgabe der Bearbeitungen am Freitag, den 08. Dezember bis 10 Uhr

AUFGABE 1

Man beweise folgende Aussage.

Sei auf der Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ eine Relation $\mathbf{R}$ definiert als

$$a\mathbf{R}b :\Leftrightarrow 9a - 3b \in 2\mathbb{Z},$$

dann ist $\mathbf{R}$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$.

AUFGABE 2

Sei A eine nichtleere Menge und B eine Teilmenge von A. Auf der Menge der Potenzmenge von A sei eine Relation R definiert als

$$X \, R \, Y \quad :\Leftrightarrow \quad X \cap B = Y \cap B.$$

a) Man zeige: R ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{P}(A)$.

b) Sei $A := \{1, 2, 3, 4\}$ und $B := \{1, 3, 4\}$. Man bestimme für $X := \{2, 3, 4\}$ die Äquivalenzklasse von $[X]$.

c) Sei $A := \{1, 2, 3, 4\}$ und $B := \emptyset$. Man bestimme für $X := \{1, 4\}$ die Äquivalenzklasse von $[X]$.

AUFGABE 3

Sei $B := \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$. Auf der Menge B werde eine Relation R definiert als

$$(a, b) \; R \; (c, d) :\Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$

a) Man zeige: R ist eine Äquivalenzrelation auf B.

b) Man beschreibe geometrisch die Äquivalenklasse von $[(2, 1)]$ und die von $[(-1, 0)]$.

AUFGABE 4

Wir definieren eine weitere Eigenschaft von Relationen:
Eine Relation R auf einer Menge M heißt *antisymmetrisch*, wenn gilt

$$\forall a, b \in M : (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b$$

oder wieder in der üblichen Schreibkonvention

$$\forall a, b \in M : aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$$

a) Ignor Mynus argumentiert: „Die Relation „teilt“ ist antisymmetrisch auf $\mathbb{Z}$, denn für alle ganzen Zahlen a, b folgt aus $a \mid b$ und $b \mid a$ stets $a = b$.“ Hat die Argumentation von Ignor eine Lücke?

b) Man gebe auf der Menge $A := \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 100\}$ eine (nichtleere) antisymmetrische Relation an.

AUFGABE 5

Seien R_1 und R_2 zwei Relationen auf der Menge $M := \{a, b, c\}$.

a) Man gebe zwei konkrete (verschiedene) Äquivalenzrelationen auf M an.

b) Man beweise oder widerlege: Es gibt zwei verschiedene Äquivalenzrelationen R_1 und R_2 auf M so, dass $R_1 \subseteq R_2$ gilt.

c) Man beweise oder widerlege: Es gibt zwei verschiedene Äquivalenzrelationen R_1 und R_2 auf M so, dass $R_1 \nsubseteq R_2$ und $R_2 \nsubseteq R_1$ und $R_1 \cup R_2 = S \times S$ gilt.