ÜBUNG 10

AUFGABE 1
Zu der folgenden Aussage $(*)$ gebe man (a) einen direkten Beweis, (b) einen Beweis durch Kontraposition und (c) einen Beweis durch Widerspruch an.

$(*)$ Für alle positiven reellen Zahlen x mit $x - \frac{2}{x} > 1$ folgt $x > 2$.

AUFGABE 2
Man formalisiere folgende Aussagen und gebe zwei unterschiedliche Beweise an.

a) Es gibt eine ganze Zahl n, so dass für alle ganzen Zahlen m die Ungleichung $(n-2)(m-2) \leq 0$ gilt.

b) Für jede positive ganze Zahl a, existiert eine ganze Zahl b mit $|b| < a$ so, dass $|b \cdot x| < a$ für jede reelle Zahl x gilt.

AUFGABE 3
Man beweise

a) durch Anwendung des Induktionssatzes,

b) durch Anwendung von Teilbarkeitsregeln,

dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ der Term $4n^3 - n$ durch 3 teilbar ist.

AUFGABE 4
Man beweise

a) durch Anwendung des Induktionssatzes,

b) durch Anwendung von algebraischen Umformungen,

dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 3$ die Ungleichung $n^2 - 2n - 1 > 0$ gilt.

AUFGABE 5 (einige Begriffe werden am Montag eingeführt)
Sei $B := \{1, 2, 3\}$.

a) Wie viele Relationen gibt es auf B?

b) Man füge in folgende Tabelle entsprechende (nichtleere) Relationen auf B ein, d.h. zum Beispiel in Zeile 4: Man gebe eine symmetrische und transitive Relation auf B an, die nicht reflexiv ist.

reflexiv	symmetrisch	transitiv	Beispiel einer Relation
nein	nein	nein	$R = \{ \quad \}$
nein	nein	ja	$R = \{ \quad \}$
nein	ja	nein	$R = \{ \quad \}$
nein	ja	ja	$R = \{ \quad \}$
ja	nein	nein	$R = \{ \quad \}$
ja	nein	ja	$R = \{ \quad \}$
ja	ja	nein	$R = \{ \quad \}$
ja	ja	ja	$R = \{ \quad \}$

AUFGABE 6
Wir definieren:
Eine Relation R auf einer Menge M heißt *rechtseindeutig*, wenn gilt

$$\forall x, y_1, y_2 \in M : (x, y_1) \in R \wedge (x, y_2) \in R \Rightarrow y_1 = y_2$$

oder in der üblichen Schreibkonvention

$$\forall x, y_1, y_2 \in M : xRy_1 \wedge xRy_2 \Rightarrow y_1 = y_2$$

a) Offenbar wird es dann auch den Begriff der „Linkseindeutigkeit“ für Relationen geben, man definiere diesen.

b) Man definiere eine endliche Relation R auf $\mathbb{N}$ (man gebe also eine Teilmenge von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ an, die endlich ist), die weder rechts- noch linkseindeutig ist.

c) Man definiere eine unendliche Relation R auf $\mathbb{N}$, die weder rechts- noch linkseindeutig ist.