Name					angemeldet	eingetragen
Vorname						
Matr. Nr.						
	Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Summe	Note
maximal	**10**	**10**	**10**	**12**	**42**	
erreicht						

Hinweis. Auf Ihrem Tisch darf nur dieses Papier und ein Stift liegen.

Übersicht über die Aufgaben

AUFGABE 1

a) Man formalisiere und beweise:
Für alle natürlichen Zahlen $a \geq 1$ gibt es eine reelle Zahl $b \geq 0$ so, dass gilt $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{b-1}{a}$.

b) Sei M eine Menge. Man formalisiere und beweise:
Es gilt für alle Teilmengen A, B von M: Genau dann, wenn der Schnitt und die Vereinigung der beiden Mengen A, B gleich sind, dann sind auch die Mengen A, B gleich.

AUFGABE 2
Gegeben ist die folgende Aussage.

> Für alle Mengen A, B, C gilt: Wenn $B \subseteq C$ gilt, dann gilt auch $A \cap B \subseteq A \cap C$.

a) Man gebe ein konkretes Beispiel für die Richtigkeit der Aussage an.

b) Man beweise die Aussage.

c) Gilt auch die Umkehrung der Aussage? Man beweise die getroffene Entscheidung.

AUFGABE 3
Es seien a und b von null verschiedene reelle Zahlen. Abhängig von diesen Variablen betrachten wir die folgende Aussage.

> Aussage $P(a, b)$: Es gibt zwei reelle Zahlen x und y, die die Gleichungen
>
> $$\begin{aligned} 20x + 22y &= 1, \\ ax + by &= 1 \end{aligned}$$
>
> erfüllen.

a) Man formalisiere die Aussage $P(20, 23)$ und überprüfe anschließend den Wahrheitswert.

b) Man prüfe, ob die Aussage $P(a, b)$ für alle von null verschiedenen reellen Zahlen a und b WAHR ist (mit Beweis).

AUFGABE 4

> **Definition.** Sei M eine nichtleere Menge und R eine Relation auf M, also $R \subseteq M \times M$. Die Relation R heiße *folgentreu* auf M, wenn für alle Elemente a, b, c aus M – ***verschieden oder nicht*** – mindestens das Paar (a, b) oder das Paar (b, c) in R ist. Also:
>
> $$R \text{ ist folgentreu auf } M \quad :\Leftrightarrow \forall a, b, c \in M : (a, b) \in R \vee (b, c) \in R.$$

a) Sei $M := \{1, 2, 3\}$. Man begründe, warum $R := \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ keine folgentreue Relation auf M ist.

b) Man ergänze die Relation aus Teilaufgabe a) durch möglichst wenige Elemente so, dass eine folgentreue Relation auf M entsteht.

c) Man zeige, dass jede folgentreue Relation R auf einer nichtleeren Menge M reflexiv ist.

d) Man zeige, dass eine folgentreue und symmetrische Relation auf einer nichtleeren Menge eine Äquivalenzrelation auf M ist.

AUFGABE 1

a) Man formalisiere und beweise:
Für alle natürlichen Zahlen $a \geq 1$ gibt es eine reelle Zahl $b \geq 0$ so, dass gilt

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{b-1}{a}.$$

b) Sei M eine Menge. Man formalisiere und beweise:
Es gilt für alle Teilmengen A, B von M: Genau dann, wenn der Schnitt und die Vereinigung der beiden Mengen A, B gleich sind, dann sind auch die Mengen A, B gleich.

Kladde

Reinschrift

Aufgabe 2

Gegeben ist die folgende Aussage.

Für alle Mengen A, B, C gilt: Wenn $B \subseteq C$ gilt, dann gilt auch $A \cap B \subseteq A \cap C$.

a) Man gebe ein konkretes Beispiel für die Richtigkeit der Aussage an.

b) Man beweise die Aussage.

c) Gilt auch die Umkehrung der Aussage? Man beweise die getroffene Entscheidung.

Kladde

Reinschrift

AUFGABE 3

Es seien a und b von null verschiedene reelle Zahlen. Abhängig von diesen Variablen betrachten wir die folgende Aussage.

Aussage $P(a, b)$:
Es gibt zwei reelle Zahlen x und y, die die Gleichungen

$$\begin{aligned} 20x + 22y &= 1, \\ ax + by &= 1 \end{aligned}$$

erfüllen.

a) Man formalisiere die Aussage $P(20, 23)$ und überprüfe anschließend den Wahrheitswert.

b) Man prüfe, ob die Aussage $P(a, b)$ für alle von null verschiedenen reellen Zahlen a und b WAHR ist (mit Beweis).

Kladde

Reinschrift

AUFGABE 4

Definition. Sei M eine nichtleere Menge und R eine Relation auf M, also $R \subseteq M \times M$. Die Relation R heiße *folgentreu* auf M, wenn für alle Elemente a, b, c aus M – ***verschieden oder nicht*** – mindestens das Paar (a, b) oder das Paar (b, c) in R ist. Also:

$$R \text{ ist folgentreu auf } M \quad :\Leftrightarrow \forall a, b, c \in M : (a, b) \in R \vee (b, c) \in R.$$

a) Sei $M := \{1, 2, 3\}$. Man begründe, warum $R := \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ keine folgentreue Relation auf M ist.

b) Man ergänze die Relation aus Teilaufgabe a) durch möglichst wenige Elemente so, dass eine folgentreue Relation auf M entsteht.

c) Man zeige, dass jede folgentreue Relation R auf einer nichtleeren Menge M reflexiv ist.

d) Man zeige, dass eine folgentreue und symmetrische Relation auf einer nichtleeren Menge eine Äquivelenzrelation auf M ist.

Kladde

Reinschrift

Kladde

Kladde

Kladde