Kerrin Bielser
Dr. Christian Hercher
Auf dem Campus 1b
24943 Flensburg
Tel. +49 461 805 2263
christian.hercher@uni-flensburg.de

Europa-Universität Flensburg
Fakultät I
Institut für Mathematik

Flensburg, 10. November 2025

Jugend trainiert Mathematik

Etwas für Dich?

Liebe Schülerin, lieber Schüler,
du hast dich für die Landesrunde der Mathematik-Olympiade in Schleswig-Holstein qualifiziert. Herzlichen Glückwunsch dazu! An zwei Tagen wirst du dort sechs interessante Aufgaben bearbeiten und andere Teilnehmende kennenlernen. Aber darüber hinaus gibt es einige spannende Angebote für Schüler_innen, die wie du richtig gut in Mathe sind. Zum Beispiel bieten die drei Universitäten des Landes mit Mathe$^{\mathrm{SH}}$ unterschiedliche Kurse und Camps an, zu denen sich alle Interessierten anmelden können. Im Folgenden wollen wir dir ein weiteres Angebot vorstellen, welches sich bundesweit an die besten Wettbewerbsteilnehmenden richtet:

Jugend trainiert Mathematik

Was ist JuMa?

Jugend trainiert Mathematik – kurz *JuMa* – ist ein deutschlandweites, kostenfreies Förderangebot, welches sich an die besten Schülerinnen und Schüler der Klassenstufen 7 bis 11 richtet. Es beginnt jedes Jahr im April und endet im Januar des Folgejahres. Da zwischendurch die Sommerferien sind, gibt es also die vier Jahrgänge 7/8, 8/9, 9/10 und 10/11. Los geht es mit deutschlandweit 100 Siebtklässler_innen, für die Schleswig-Holstein sechs von euch benennen darf. Mit der erfolgreichen Teilnahme im ersten JuMa-Jahr könnt ihr euch dann für die Teilnahme im Jahrgang 8/9 qualifizieren. So geht es Jahr für Jahr weiter. Am Ende des Jahrgangs 10/11 steht für die besten sechs JuMa-Schüler_innen die Teilnahme an der **Middle European Mathematical Olympiad**, einem internationalen Schülerwettbewerb! Aber auch zuvor schon lernt man viel Mathematisches kennen und schließt neue Freundschaften.

Wie läuft JuMa ab?

Im ersten Jahrgang 7/8 erhältst du über das Jahr verteilt insgesamt sechs *Korrespondenzbriefe* – mathematische Texte inklusive Übungsaufgaben, die dir zugesendet werden. In diesen wird jeweils ein mathematisches Gebiet aufgegriffen, wesentliche Inhalte daraus erklärt und Lösungsstrategien aufgezeigt. Ein solcher Brief enthält auch immer Übungsaufgaben, die du bearbeiten und daran das Gelesene selbst anwenden kannst. Zu einigen dieser Übungsaufgaben sendest du deine Lösungen einer Mentorin bzw. einem Mentor zu. Sie bzw. er steht dir auch gern bei Fragen zur Seite. Später erhältst du zu deinen Lösungen eine ausführliche Rückmeldung mit Tipps, um deine Vorbereitung auf Mathematik-Wettbewerbe zu verbessern.
Ab dem Jahrgang 8/9 gibt es neben den Korrespondenzbriefen auch jährlich zwei *Präsenz-Seminare*, bei denen man jeweils für ein verlängertes Wochenende in einer Jugendherberge an einem Ort in Deutschland zusammenkommt. Dort macht man zusammen mit den anderen Teilnehmenden Mathe, lernt neue Freunde kennen und hat gemeinsam Spaß.
Die Atmosphäre bei JuMa ist sehr angenehm und locker, es wird aber auch erwartet, dass man das Training ernst nimmt. Wie in anderen Bereichen – z. B. im Sport oder in der Musik – wird man auch in Mathematik nur dann richtig gut, wenn man übt. Dies kann manchmal durchaus zeitaufwändig sein. Dafür sind die Momente des Glücks, wenn man länger an einer Aufgabe geknobelt hat, und sie schließlich doch lösen kann, um so lohnender! :)

Und was heißt das jetzt für mich?

Wenn du gerade in Klasse 7 bist und dich für die Landesrunde der Mathematik-Olympiade qualifiziert hast, hast du die Chance in diesem Jahr bei JuMa dabei zu sein. Auf den folgenden Seiten findet sich eine kurze Version, wie so ein Korrespondenzbrief bei JuMa ausschauen könnte. Wenn du Interesse hast, so etwas in Zukunft häufiger zu lesen und Spaß am regelmäßigen Knobeln an spannenden Aufgaben hast, dann sende uns an die oben genannte E-Mail-Adresse deine Lösungen zu den Aufgaben zu. Auch über Bearbeitungen von Teilaufgaben freuen wir uns. Gern geben wir dir zu deinen Lösungen dann Rückmeldung. Für Rückfragen stehen wir unter der entsprechenden E-Mail-Adresse ebenfalls gern zur Verfügung.
Vielleicht gehörst du zu den glücklichen Sechs aus Schleswig-Holstein, die an JuMa im nächsten Durchlauf teilnehmen! :)

Übungs-Korrespondenzbrief: Teilbarkeiten

Gerade bei Wettbewerben wie der Mathematik-Olympiade sind Aufgaben zu Teilbarkeiten keine Seltenheit. Man sagt, eine ganze Zahl n ist durch eine ganze Zahl k teilbar, wenn bei der Division von n durch k kein Rest bleibt, also $\frac{n}{k}$ ebenfalls eine ganze Zahl ist. Dann schreibt man auch $k \mid n$ („k teilt n“). Zum Beispiel gilt $3 \mid 15$, denn $15 : 3 = 5$ ist eine ganze Zahl. In der Mathematik ist Folgendes ganz wichtig:
Man darf niemals durch 0 teilen!
(Dagegen ist 0 durch *jede* Zahl teilbar – überlege dir doch einmal, warum das so ist.)
Bestimmt kennst du schon den einen oder anderen Trick, wie man schnell sehen kann, ob eine Zahl einen gewissen Teiler besitzt. In diesem Brief werden einige Teilbarkeitsregeln behandelt. Ein wichtiges Hilfsmittel ist dabei die Quersumme:

Definition 1. *Die* Quersumme *einer Dezimalzahl entspricht der Summe ihrer Ziffern.*
Die alternierende Quersumme *erhält man, wenn man die Ziffern der Zahl abwechselnd addiert und subtrahiert. Die Einerziffer hat dabei ein positives Vorzeichen.*
Allgemeiner kann so auch die [alternierende] Zweier-Quersumme, Dreier-Quersumme, *usw. definiert werden: Zunächst teilt man die Zahl beginnend mit der Einerziffer zum Beispiel für die Zweier-Quersumme in Zweierblöcke auf. Dann werden diese als zweistellige Zahlen addiert [bzw. abwechselnd addiert und subtrahiert].*

Als Beispiel soll die Zahl 12345 betrachtet werden: Diese hat die Quersumme $1+2+3+4+5=15$, die alternierende Quersumme $5-4+3-2+1=3$, die Zweier-Quersumme $1+23+45=69$ und die alternierende Zweier-Quersumme $45-23+1=23$.

Teilbarkeitsregeln

Da jede Zahl durch 1 teilbar ist, braucht man hier keine Teilbarkeitsregel. Für die Zahlen von 2 bis 13 gilt: Eine Zahl ist durch diese jeweils genau dann teilbar, wenn ...

		Beispiel
2:	*... sie als Einerziffer 0,2,4,6 oder 8 besitzt.*	123**4**
3:	*... ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.*	123: $1+2+3=6$
4:	*... die Zahl aus den letzen zwei Ziffern durch 4 teilbar ist.*	13**24**
5:	*... sie als Einerziffer 0 oder 5 besitzt.*	1234**5**
6:	*... sie durch 2 und durch 3 teilbar ist.*	342
7:	*... ihre alternierende Dreier-Quersumme durch 7 teilbar ist.*	75432: $432-75=357$
8:	*... die Zahl aus den letzten drei Ziffern durch 8 teilbar ist.*	10**432**
9:	*... ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.*	3456: $3+4+5+6=18$
10:	*... sie die Einerziffer 0 hat.*	321**0**
11:	*... ihre alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist.*	1243: $3-4+2-1=0$
12:	*... sie durch 3 und durch 4 teilbar ist.*	324
13:	*... ihre alternierende Dreier-Quersumme durch 13 teilbar ist.*	681473: $473-681=-208$ $=13\cdot(-16)$

Ohne an dieser Stelle vollständige Beweise der Teilbarkeitsregeln anzugeben, wollen wir doch die wesentlichen Ideen erklären. Dabei ist zu berücksichtigen, dass wir Zahlen im Dezimalsystem betrachten, also z. B. $1234 = 1\cdot 1000 + 2\cdot 100 + 3\cdot 10 + 4$. Die Zehnerregel folgt unmittelbar. Daraus lässt sich direkt die Zweierregel folgern: Da sich jede Zahl nach der Zehnerregel als Vielfaches von 10 plus die Einerziffer schreiben lässt und 10 gerade ist, ist eine Zahl genau dann durch 2 teilbar, wenn ihre Einerziffer dies ist – also 0, 2, 4, 6 oder 8. Analog folgt die Fünferregel. Auch die Vierer- und Achterregel lassen sich so herleiten, denn 100 ist durch 4 und 1000 durch 8 teilbar.
Etwas schwieriger ist es bei der Dreierregel; hier wollen wir die Idee an einem Beispiel erklären. Wesentlich ist dabei, dass jede Zahl, die nur aus Neunen als Ziffern besteht, durch 3 teilbar ist. Außerdem ändert das Subtrahieren von einem Vielfachen von 3 nichts daran, ob eine Zahl durch 3 teilbar ist. So erhalten wir zum Beispiel für 3456:

$$3456 = 3\cdot 1000 + 4\cdot 100 + 5\cdot 10 + 6\cdot 1 = 3\cdot(999+1) + 4\cdot(99+1) + 5\cdot(9+1) + 6\cdot 1.$$

Subtrahieren wir von 3456 nun $3\cdot 999 + 4\cdot 99 + 5\cdot 9$ – eine durch 3 teilbare Zahl –, so bleibt also genau die Quersumme $3+4+5+6=18$ übrig. Da diese durch 3 teilbar ist, gilt das auch für 3456, als Summe zweier durch 3 teilbarer Zahlen. Analog funktioniert die Begründung für die Teilbarkeit durch 9.

Auch die Elferregel lässt sich ähnlich erklären; hier nutzt man, dass 11, 99, 1001, 9999, 100001, 999999, ... jeweils durch 11 teilbar sind. Entsprechend gilt am Beispiel der Zahl 1243:

$$1243 = 1 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 3 \cdot 1 = 1 \cdot (1001 - 1) + 2 \cdot (99 + 1) + 4 \cdot (11 - 1) + 3 \cdot 1.$$

Subtrahieren von $1 \cdot 1001 + 2 \cdot 99 + 4 \cdot 11$, einem Vielfachen von 11, führt also dazu, dass die alternierende Quersumme verbleibt. Daher ist eine Zahl genau dann durch 11 teilbar, wenn dies für ihre alternierende Quersumme gilt.
Auch die Erklärung für die Siebener- und die Dreizehnerregel funktioniert ähnlich: Die Zahl 1001 ist nämlich sowohl durch 7 als auch durch 13 teilbar. Versuche dir doch einmal zu überlegen, wie man daraus die beiden Teilbarkeitsregeln ableiten kann.
Für die Teilbarkeit durch 6 und durch 12 nutzt man, dass $6 = 2 \cdot 3$ und $12 = 3 \cdot 4$ gilt und sowohl 2 und 3 als auch 3 und 4 teilerfremd sind. Analog kann man für alle Zahlen mit mehreren Faktoren vorgehen, allerdings ist es wichtig, dass diese *teilerfremd* sind. Zum Beispiel gilt nämlich auch $12 = 2 \cdot 6$, wobei jedoch 2 und 6 durch 2 teilbar sind. Deswegen ist nicht jede Zahl, die durch 2 und 6 teilbar ist, auch durch 12 teilbar; zum Beispiel sind 2 und 6 Teiler von 18, aber 12 wiederum nicht.

Aufgaben

Aufgabe 1: Weise mithilfe der Teilbarkeitsregeln nach, dass 2520 durch alle Zahlen von 1 bis 10 teilbar ist und begründe, warum es keine kleinere solche Zahl gibt.

Aufgabe 2: Eine andere Teilbarkeitsregel für die 7 funktioniert folgendermaßen: Man streicht die letzte Ziffer und subtrahiert ihr Doppeltes von der verbleibenden Zahl. Genau dann, wenn man durch (mehrfaches) Wiederholen dieses Schrittes eine durch 7 teilbare Zahl – z. B. 0 – erhält, ist auch die ursprüngliche Zahl durch 7 teilbar.
Beispielsweise ist 22701 durch 7 teilbar, denn

$$\begin{aligned} 22701 &\rightarrow 2270 - 2 \cdot 1 = 2268 \\ &\rightarrow 226 - 2 \cdot 8 = 210 \\ &\rightarrow 21 - 2 \cdot 0 = 21 \\ &\rightarrow 2 - 2 \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

Begründe, warum diese Teilbarkeitsregel immer stimmt.

Zusatzaufgabe:
Christine hat die Zahl

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 32 \cdot 33 \cdot 34 = 295232799cd96041408476186096435ba000000.$$

berechnet, allerdings sind beim Falten des Zettels die vier mit a, b, c und d bezeichneten Ziffern unleserlich geworden.
Ermittle die Ziffern a, b, c und d, ohne die Zahl durch Ausmultiplizieren zu berechnen.

Sende deine (Teil-)Lösungen zu den Aufgaben **bis spätestens 19. Dezember 2025** per E-Mail an die Adresse aus dem Briefkopf. Du erhältst von uns eine Korrektur deiner Einsendung. Und vielleicht bist du dann bei JuMa dabei. Viel Erfolg! :)