Forschung am Institut für Mathematik der Europa-Universität Flensburg

Kerrin Bielser, Merlin Carl, Christian Hercher, Philipp Lampe, Uwe Leck, Hinrich Lorenzen, Michael Schmitz

Europa-Universität Flensburg
Fakultät I
Institut für Mathematik

Macaulay Posets – extremale Kombinatorik

Bei Macaulay Posets handelt es sich um spezielle geordnete Mengen. Ein Beispiel dafür ist die Menge aller *Worte* aus Nullen und Einsen. Die Abbildung visualisiert diese Struktur, genannt *0-1-Teilwortordnung*. Dabei steht jeder Knoten für ein Wort und zwei Worte sind verbunden, wenn man das eine Wort durch Streichen einiger Nullen und Einsen in das andere überführen kann.
Die in der Abbildung hervorgehobenen Bereiche veranschaulichen die Gleichartigkeit gewisser Teilstrukturen. Diese Beobachtung kann genutzt werden, um nachzuweisen, dass die 0-1-Teilwortordnung *end-schattenvergrößernd* ist.
Diese Arbeit ist Ausgangspunkt eines Dissertationsprojekts an der EUF.

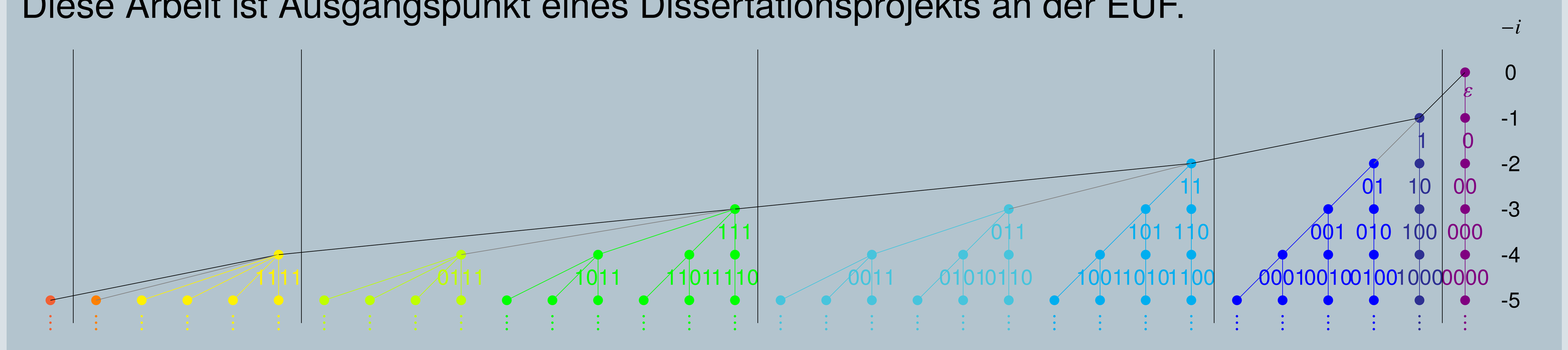

Abbildung: Visualisierung einiger Level der 0-1-Teilwortordnung (mit hervorgehobenen Teilstrukturen)

- K. Bielser. Über Eigenschaften spezieller Macaulay Posets. *Masterarbeit Universität Rostock*. betreut durch U. Leck, EUF (2023)
- K. Bielser. On a Property of the 0-1 Subword Order. *to be published*. (2025)

Perfekte Zerlegungen zählen

Unter einer perfekten Zerlegung der Menge $\{1, 2, \dots, 3n\}$ verstehen wir eine Zerlegung in paarweise disjunkte Teilmengen $\{x, y, z\}$ mit $x + y = z$. Für $n = 4$ ist etwa $\{\{1, 5, 6\}; \{2, 8, 10\}; \{3, 9, 12\}; \{4, 7, 11\}\}$ eine solche. Wie findet man für gegebenes n die Anzahl dieser Zerlegungen möglichst schnell? Algorithmus 1 und weitere optimierte Varianten verbessern zuvor bekannte Algorithmen deutlich.

Input: A nonempty set $S = \{b_1, b_2, \dots, b_{3m}\} \subseteq \{1, \dots, 3n\}$ with $b_1 < b_2 < \dots < b_{3m}$, the sums $S_1 := \sum_{i=1}^{2m} b_i$ and $S_2 := \sum_{i=2m+1}^{3m} b_i$
Output: The number of partitions $P = \{\{x_1, y_1, z_1\}, \dots, \{x_m, y_m, z_m\}\}$ of S into pairwise disjoint subsets $\{x_i, y_i, z_i\}$ satisfying $x_i + y_i = z_i$ for all $1 \le i \le m$

```
Function Counting_perfect_Partitions(S, S_1, S_2):
  if m = 1 then                                   // End of Recursion
    if S_1 = S_2 then
      return 1
    else
      return 0
  if S_1 > S_2 then                               // Condition of Theorem 2 does not hold
    return 0
  number_of_perfect_partitions ← 0;
  for i = 2 to 3m − 1 do
    if there is an i < k ≤ 3m with b_1 + b_i = b_k then  // found a triple (x,y,z) = (b_1,b_i,b_k)
      S' ← S \ {b_1, b_i, b_k};
      if i ≥ 2m + 1 then
        S'_1 ← S_1 − b_1 − b_{2m};
        S'_2 ← S_2 − b_i − b_k + b_{2m};
      else if k ≥ 2m + 1 then
        S'_1 ← S_1 − b_1 − b_i;
        S'_2 ← S_2 − b_k;
      else
        S'_1 ← S_1 − b_1 − b_i − b_k + b_{2m+1};
        S'_2 ← S_2 − b_{2m+1};
      number_of_perfect_partitions+ = Counting_perfect_Partitions(S', S'_1, S'_2);
  end
  return number_of_perfect_partitions;
end
```

Algorithm 1: Basic Algorithm.

- C. Hercher, F. Niedermeyer. Efficient calculation of the number of partitions of the set $\{1, 2, \dots, 3n\}$ into subsets $\{x, y, z\}$ satisfying $x + y = z$. *Mathematics Open* (2024)

Weitere Arbeiten (Auswahl) im Bereich Algorithmen-Design und Computer-unterstützte Untersuchng mathematischer Probleme:

- C. Hercher. There are no Collatz-m-Cycles with $m \le 91$. *J. Integer Seq.* (2023)
- C. Hercher. On the Sum of a Squarefree Integer and a Power of Two. *J. Integer Seq.* (2025)
- K. Fegert, C. Hercher. Triangluar Numbers With a Single Repeated Digit. *J. Integer Seq.* (2025)

Didaktisch orientierte Rekonstruktion von Mathematik

Bei der didaktisch orientierten Rekonstruktion von Mathematik geht es darum, mathematische Resultate, die der fachwissenschaftlichen Community bereits bekannt sind, so aufzubereiten, dass sie für Unterrichtszwecke verwendbar werden. Dies umfasst das Finden neuer Zugänge, Beweise und Veranschaulichungen, die Einbeziehung historischer Entwicklugen sowie didaktische Analysen von einem zeitgemäßen Standpunkt.
Wir haben Artikel dieser Art zu Themen aus verschiedenen mathematischen Teilbereichen (Stochastik, Geometrie, Analysis, ...) in renommierten Fachzeitschriften veröffentlicht.

- P. Lampe, M. Schmitz. Die Rothe-Hagen-Identität – Ein Anlass zum Forschenden Lernen. Eingereicht bei *Mathematische Semesterberichte* (2025)
- M. Carl, M. Schmitz: A litte Pick of Lakatos. In: *From Mathematical Riddles to Research: What Makes a Problem Good?* Deniz Sarikaya (Ed.), Birkhäuser, Book series: Trends in the History of Sciences (pre-print, accepted)
- M. Carl, U. Leck, H. Lorenzen, M. Schmitz. Teaching Units for Mathematical Enrichment Activities. In: D. Sarikaya, L. Baumanns, K. Heuer, B. Rott (eds) *Problem Posing and Solving for Mathematically Gifted and Interested Students*. Springer Spektrum (2023)

Unendliche Berechnungen

Die transfinite Berechenbarkeitstheorie untersucht Verallgemeinerungen von Maschinenmodellen wie der Turing- oder Registermaschine auf transfinite Zeit- und Speicherressourcen. Insbesondere wurden Beiträge zu folgenden Themen in führenden Fachjournalen publiziert:

- Die Komplexität von OTM-erkennbaren Objekten; hier ergeben sich Zusammenhänge zu Typen von sehr großen Kardinalzahlen, wie etwa Woodin-Kardinalzahlen.
- Die Untersuchung von Konzepten und Ergebnissen der algorithmischen Zufallstheorie, wie der Martin-Löf-Zufälligkeit oder der Theoreme von Sacks und van Lambalgen, im Kontext transfiniter Maschinenmodelle.
- Die Untersuchung von Analoga zu klassischen Komplexitätsklassen, mit Anwendungen in der deskriptiven Mengenlehre
- Effektive Reduzierbarkeit und Weihrauch-Reduzierbarkeit zwischen mengentheoretischen Aussagen mithilfe transfiniter Maschinen.
- Eine neuartige Semantik der intuitionistischen Mengenlehre, mit Anwendungen auf deren Beweistheorie.

- M. Carl. Ordinal Computability. An Introduction to Infinitary Machines. De Gruyter Berlin/Boston (2019)
- M. Carl. Space and Time Complexity for Infinite Time Turing Machines. *Journal of Logic and Computation*, vol. 30(6) (2020)
- M. Carl. Effectivity and Reducibility with Ordinal Turing Machines. *Computability*, vol. 10(4) (2021)
- M. Carl, P. Schlicht, P. Welch. Decision Times for Infinite Computations. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 63(2) (2022)
- M. Carl, L. Galeotti, R. Passmann. Realisability for Infinitary Intuitionistic Set Theory. *Annals of Pure and Applied Logic*, vol. 174(6) (2023)
- M. Carl, P. Schlicht, P. Welch. Countable Ranks at the First and Second Projective Level. To appear in: *Israel Journal of Mathematics*.

Extremale Mengen

In der extremalen Mengenlehre geht es oft darum, wie groß ein System von (endlichen) Mengen werden kann, das bestimmte Bedingungen erfüllt. Eine der wichtigsten Aussagen in diesem Gebiet ist der Satz von Sperner (1928), der sagt, wie groß ein solches System auf einer gegebenen Grundmenge werden kann, wenn keine der Mengen in einer anderen enthalten sein darf. Ein derartiges Mengensystem heißt *Antikette*.

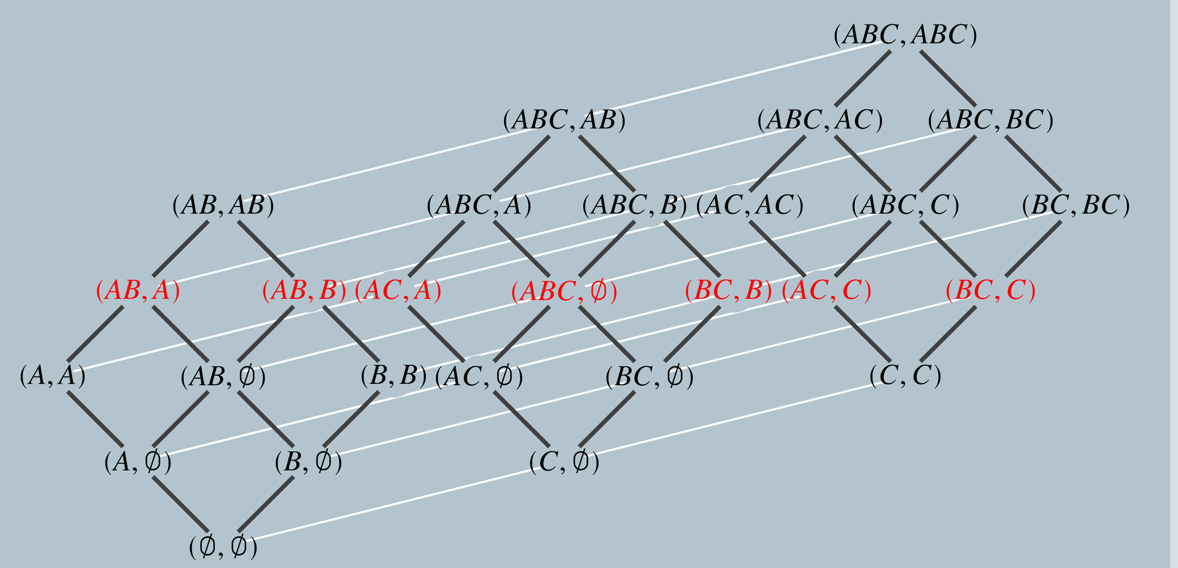

Abbildung: eUC search/solution space over 3 columns

Der Satz von Sperner hat vielfältige inner- und außermathematische Anwendungen, z. B. in der Informatik oder der kombinatorischen Biologie.
Mit einer internationalen Forschungsgruppe haben wir Verallgemeinerungen und Varianten des Satzes gezeigt und diese im Bereich der relationalen Datenbanken angewendet.

- J.R. Griggs, T. Kalinowski, U. Leck, I.T. Roberts, and M. Schmitz. Sizes of flat maximal antichains of subsets. *Order*, published online in June 2024.
- P. Skavantzos, U. Leck, K. Zhao, and S. Link. Uniqueness Constraints for Object Stores. *ACM J. Data Inform. Quality*, 15(2) (2023), 1–29.
- J.R. Griggs, T. Kalinowski, U. Leck, I.T. Roberts, and M. Schmitz. The Saturation Spectrum for Antichains of Subsets. *Order*, 40 (2023), 537–574.
- Z. Wei, U. Leck, and S. Link. Discovery and Ranking of Embedded Uniqueness Constraints. *Proc. VLDB Endow.*, Volume 12 Issue 13, 2019, pp. 2339-2353.

Metall-Zahlen

Es gibt wohl keine andere Zahl, mit der Ausnahme vielleicht der Zahl π, über die so viel geschrieben wurde, wie über den goldenen Schnitt $\varphi = \frac{1}{2} \cdot (1 + \sqrt{5}) \approx 1{,}618$. Der goldene Schnitt beschreibt eine „harmonische“ Teilung.
Inspiriert durch die Darstellung des goldenen Schnitts als Kettenbruch aus lauter Einsen definieren wir den silbernen Schnitt als Kettenbruch aus lauter Zweien usw. Solche Zahlen nennen wir *Metallzahlen*. Für beliebige Metallzahlen μ und ganze Zahlen m, n definieren wir $m \star n := m \cdot n + \lfloor \mu m \rfloor \cdot \lfloor \mu n \rfloor$. Dann gilt für beliebige ganze Zahlen x, y, z das Assoziativgesetz:

$$(x \star y) \star z = x \star (y \star z).$$

- C. Hercher, P. Lampe, U. Leck. Metallzahlen. *Unpublished Manuscript*. (2025)

Stimmt's? – Diproche: Automatisches Beweisprüfen in didaktischen Kontexten

Diproche („DIdactical PROof CHEcking“) ist ein an der EUF entwickeltes und erprobtes KI-System, das u. a. in natürlicher Sprache verfasste Beweistexte automatisch auf ihre Korrektheit überprüfen und Rückmeldungen generieren kann. Die neuere Entwicklungsarbeit zielt vor allem darauf ab, die Möglichkeiten von Deep Learning und insbesondere von Sprachmodellen für das System nutzbar zu machen.

- M. Carl. Number Theory and Axiomatic Geometry in the Diproche System. *ThEdu Proceedings* (2020)
- M. Carl, H. Lorenzen, M. Schmitz. Natural Language Proof Checking in Introduction to Proof Classes – First Experiences with Diproche. *ThEdu Proceedings* (2022)
- M. Carl. Improving the Diproche CNL through Autoformalization via GPT-3. *ThEdu Proceedings* (2023)
- M. Carl. Using large language models for (de-)formalization and natural argumentation exercises for beginner's students. *ThEdu Proceedings* (2023)