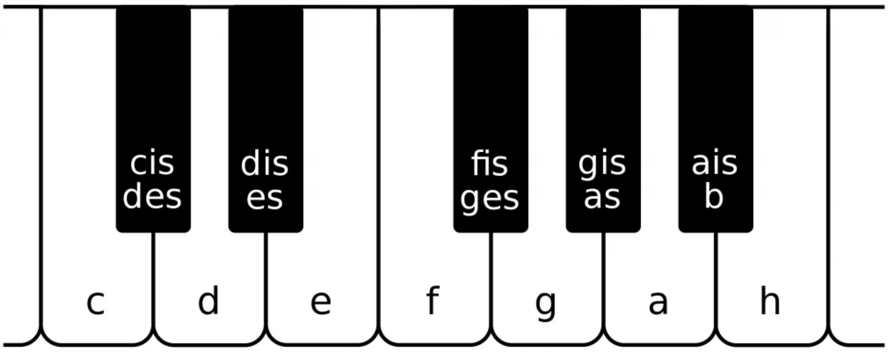
Musik und Mathematik

Was hat das Stimmen eines Klaviers mit der Irrationalität von $\sqrt{2}$ zu tun und was Akkorde mit Topologie?
Aus der Musiktheorie ergeben sich viele interessante mathematische Fragen.
Wir fassen hier das Wichtigste der INTERREG Sitzung zum Thema zusammen. Darüber hinaus gibt es Einblick in weitere Themen in diesem Bereich, die wir in Kursen von Mathe^{SH} behandelt haben.
Es ist keine musikalische Vorbildung nötig, es ist ja ein Mathe-Programm (aber nebenbei wird auch ein bisschen Musiktheorie vermittelt). Lösungsskizzen für die Aufgaben befinden sich am Ende.

1 Ein paar Hintergründe und Knobelaufgaben

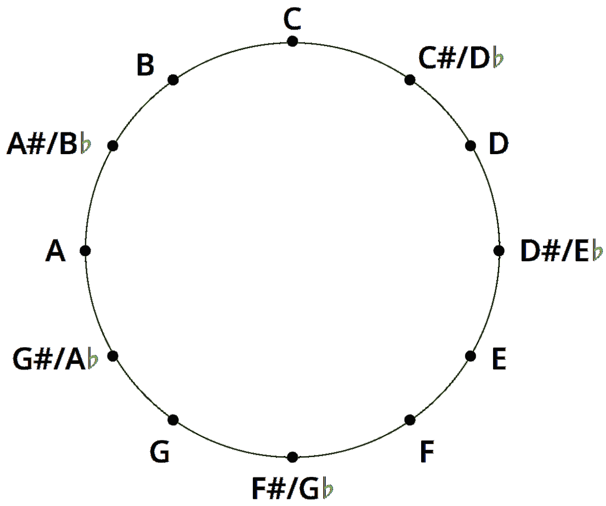
1.1 Die Töne als zyklische Gruppe



In der neueren westlichen Musik wird eine Oktave üblicherweise in 12 Halbtonschritte eingeteilt, die hier auf der Klaviatur zu sehen sind. Nach dem H beginnen wir erneut mit C. Das höhere C wird im Wesentlichen als der gleiche Ton wie das tiefere C wahrgenommen (eben nur höher).

Aufgabe 1 Beginnend bei D wird auf dem Klavier ein (chromatischer) Lauf von 38 Halbtonschritten nach oben gespielt. Auf welchem Ton endet der Lauf?

Genau wie die Stunden auf der Uhr haben die Töne die Struktur einer zyklischen Gruppe, der Z_{12}. Anschaulich können wir die Töne also auf einem Kreis (also der S^1) anordnen:



Rechnen modulo Die Rechenoperation, die hier verwendet wird, nennt sich modulo. Formal gilt:
Seien a, b und m ganze Zahlen: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$, wobei $m \neq 0$. Es gilt: a und b sind kongruent modulo m, wenn sie bei Division durch m denselben Rest lassen. Wir schreiben:

$$a \equiv b \pmod{m}$$

Andernfalls sind sie inkongruent modulo m:

$$a \not\equiv b \pmod{m}$$

Aufgabe 2 Bestimme eine Lösung für x und gib an, wie viele Lösungen es insgesamt gibt (es gilt $x \in \mathbb{N}$):

(a) $135 \equiv x \pmod{35}$

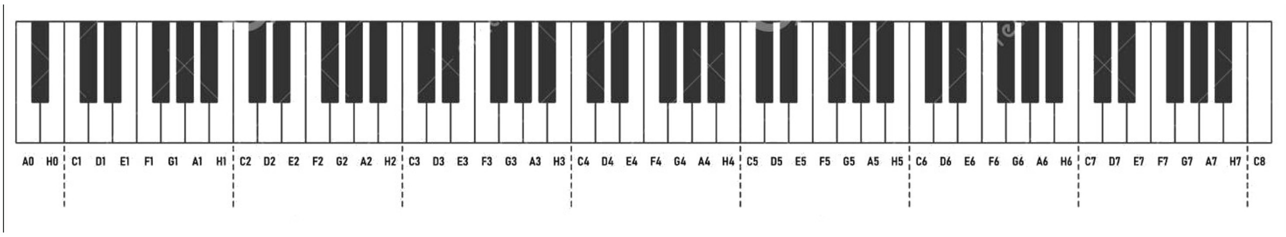
(b) $x \equiv 5 \pmod{35}$

(c) $135 \equiv 5 \pmod{x}$

1.2 Frequenzen

Die Tonhöhe wird durch die *Frequenz* bestimmt, d.h. wie oft der Schall pro Sekunde schwingt, die Einheit für einmal pro Sekunde ist *Hertz*, wir schreiben *Hz*. Der für Menschen hörbare Bereich ist in etwa von 20 Hz bis 20.000 Hz = 20 kHz.
Ein Tonabstand von einer Oktave verdoppelt die Frequenz. Z.B. hat ein A die Frequenz 110 Hz, dann hat das nächst höhere A eine Frequenz von 220 Hz. Generell gilt: Töne, die den gleichen Abstand haben (bzw. von uns mit dem gleichen Abstand wahrgenommen werden) haben ein gleiches Frequenzverhältnis. Die menschliche Wahrnehmung von Tonhöhen ist logarithmisch.

Um Töne verschiedener Oktaven zu unterscheiden, werden sie oft durchnummeriert A_1, A_2, usw. Eine gängige Nummerierung orientiert sich am Klavier. Dort ist der niedrigste Ton A_0, der höchste C_8. Diese Nummerierung werden wir auch hier verwenden.



Aufgabe 3 Der Ton A_4, auch Kammerton genannt, wird üblicherweise auf 440 Hz (in Orchestern und für historische Aufführungen auch abweichend) gestimmt. Berechne die Frequenz von A_0 und A_7.

Aufgabe 4 Berechne, wie viele Oktaven das menschliche Gehör ungefähr wahrnehmen kann.

2 Harmonien

Die einfachste Modellierung der Schwingung eines Tones ist eine Sinusfunktion (diese erzeugt einen sogenannten Sinuston). Der Ton A_4 könnte also durch die Funktion

$$f(t) = \sin(440 \cdot 2\pi\, t)$$

dargestellt werden (wenn t die Einheit Sekunde hat). Allgemeiner nennen wir ϕ die *Frequenz* der Funktion

$$f(t) = \sin(\phi \cdot 2\pi\, t).$$

Ein Instrument erzeugt nun üblicherweise keine Sinustöne, sondern etwas mit mehr Klangfarbe. Dies geschieht durch die *Obertöne*. *Obertöne* sind Töne mit einem ganzzahligen Vielfachen der Frequenz des Grundtons. Bei einem Ton der Frequenz ϕ schwingen also auch die Frequenzen $2\phi, 3\phi, 4\phi \ldots$ mit. Je nachdem wie ausgeprägt die verschiedenen Obertöne sind, entsteht die spezifische Klangfarbe eines Instruments.
Schon sehr lange haben sich Menschen gefragt, welche Töne gut zusammen klingen. Eine gängige Theorie, die schon auf die Pythagoräer (ca. 500 v.Chr.) zurückgeht, ist:

Töne klingen schön zusammen, wenn sie gemeinsame Obertöne haben.

Aufgabe 5 Findet Töne, die nach dieser Theorie gut zusammen mit A_4 (440 Hz) klingen. Beschränkt euch auf Töne, die maximal eine Oktave oberhalb oder unterhalb von A_4 liegen.

Die Pythagoräer beschrieben dieses Prinzip mit

Harmonische Tonintervalle stehen in kleinen ganzzahligen Verhältnissen.

Einigen dieser Tonintervalle gaben sie Namen (wir geben hier die lateinisierte und heute gängie Version dieser Namen an):

Tonverhältnis	**Name**
1 : 2	Oktave
2 : 3	Quinte
3 : 4	Quarte
4 : 5	(große) Terz

2.1 Stimmungen

Wird nur eine Melodie gespielt und kann jede beliebige Tonhöhe erzeugt werden (z.B. Gesang), so können die oben genannten reinen Intervalle einfach nacheinander angestimmt werden.

Aufgabe 6 Eine Melodie wird folgendermaßen gespielt: Sie startet bei 440 Hz, geht nun eine Quinte nach oben, zwei Quarten nach unten, eine Quinte nach oben und abschließend eine Terz nach unten. Welche Frequenz hat der letzte Ton?

Reine Vokalmusik wird teilweise immer noch in diesen reinen Intervallen intoniert. Dass es dabei zu einer Drift des Ausgangtons kommt, ist hier nicht weiter schlimm. Mit auf feste Töne gestimmten Instrumenten ist dies jedoch nicht möglich.

Pythagoräische Stimmung Stellen wir uns vor, wir wollen ein Instrument mit festen Tonhöhen (z.B. Klavier) stimmen. Wir entscheiden uns zumindest die Quinte und die Oktave in der reinen Form zu behalten. Ausgehend von einem Grundton, sagen wir A, gehen wir nun immer in Quinten nach oben und Oktaven nach unten, so dass die resultierenden Töne in der Oktave oberhalb von A leigen.

Aufgabe 7 Dieser Prozess wird nie genau auf den Ausgangston A zurückkommen. Nach wie Vielen Schritten sind wir zumindest wieder nah an A dran und können den Prozess hier beenden.

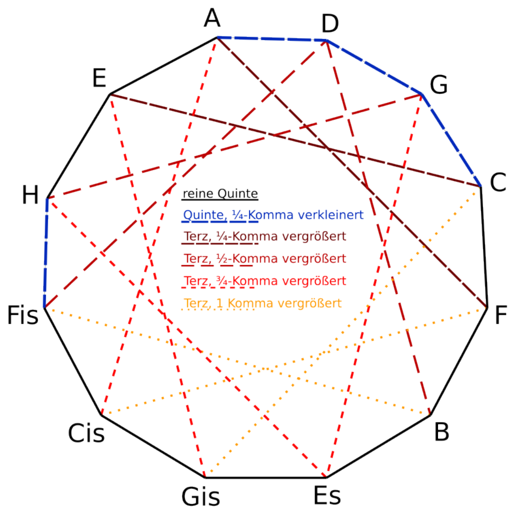
So sah auch die Lösung der Pythagoräer aus, die *pythagoräische Stimmung*. Diese können wir uns in etwa so vorstellen:
Wir erzeugen 11 weitere Töne aus A (im Weiteren werden wir den Kammerton A_4 als Ausganspunkt verwenden). Gehe von A_4 eine Quinte nach oben (und ggf. eine Oktave nach unten, so dass der neue Ton zwischen A_4 und A_5 liegt). Wiederhole dies 5-mal. Gehe von A_4 eine Quinte nach unten (und ggf. eine Oktave nach oben, so dass der neue Ton zwischen A_4 und A_5 liegt). Wiederhole dies 6-mal. Die so erhaltenen Töne bezeichnen wir mit:

$$\mathsf{Es} - \mathsf{B} - \mathsf{F} - \mathsf{C} - \mathsf{G} - \mathsf{D} - \mathsf{A} - \mathsf{E} - \mathsf{H} - \mathsf{Fis} - \mathsf{Cis} - \mathsf{Gis}.$$

Aufgabe 8 Bestimme das Frequenzverhältnis von Gis zu Es.

Diese zu klein geratene Quinte "Gis – Es" wird häufig *Wolfsquinte* genannt.

Eine stark verkürzte Geschichte neuzeitlicher westlicher Stimmungen Um die sehr dissonant klingende Wolfsquinte loszuwerden, wurden Stimmungen entwickelt, bei denen der Fehler, genannt *pythagoräisches Komma*, statt auf eine Quinte auf mehrere verteilt wurde. Zunächst wurden diese jedoch nicht gleichmäßig auf alle 12 Quinten verteilt. Einige der Quinten wurden rein gelassen. Ein bekanntes Beispiel ist die *Werckmeister III* Stimmung vom Ende des 17. Jahrhunderts. Wie in der Grafik (Quelle: Cebus, CC0, Wikipedia) zu sehen ist, wurden 8 Quinten rein gestimmt und das pythagoräische Komma gleichmäßig auf die vier anderen verteilt.



Gleichstufige Stimmung Wird das pythagoräische Komma gleichmäßig auf alle 12 Quinten aufgeteilt, so erhalten wir die heute gängige gleichstufige Stimmung.

Aufgabe 9 Eine 12-tönige Stimmung soll beliebig transponierbar sein, das heißt die Frequenzverhältnisse einer Melodie sollen immer die gleichen sein, egal von welchem Ton gestartet wird. In welchem Frequenzverhältnis müssen die Töne zueinander stehen? Bestimme die Frequenzen, wenn $A_4 = 440$ Hz.

Aufgabe 10 Zeige, dass es in der gleichstufigen Stimmung keine reinen Intervalle außer der Oktave geben kann.

3 Schwebung

Wir haben bereits gesehen, dass sich Töne als Sinusfunktionen, die sich in ihrer Frequenz unterscheiden, modellieren lassen. Um die Mathematik übersichtlich zu halten, werden wir die Obertöne in diesem Abschnitt ignorieren.

Stellen wir uns folgendes praktisches Problem vor: Zwei Saiten, die den gleichen Ton geben sollen, sind leicht verstimmt. Wie finde ich heraus, um wie viel die Saiten verstimmt sind? Dieses Problem tritt auf, wenn ich zwei Saiten gleicher Höhe (z.B. Klavier) habe, in ähnlicher Weise aber auch, wenn ich zwei Saiten habe, die ein reines Intervall, z.B. eine Quinte, auseinander liegen.

Verwende zunächst ein Tool, beispielsweise den Online Tone Generator `https://onlinetonegenerator.com/multiple-tone-generator.html` um einige Beispiele dieser Art zu erzeugen und anzuhören. Beschreibt, was ihr hört.

Interessante Kombinationen sind beispielsweise:

- 440 Hz und 441 Hz
- 22 Hz und 23 Hz
- 220 Hz und 275 Hz
- 22 Hz und 27,5 Hz
- 15000 Hz und 15220 Hz
- 3 leicht unterschiedliche Töne

Schaut euch außerdem bei Geogebra visuell an, was hier passiert: `https://www.geogebra.org/m/asenrsed`.

Sei ϕ der Mittelwert der beiden Frequenzen, so dass eine der Saiten Frequenz $\phi + \alpha$ und die zweite Frequenz $\phi - \alpha$ hat.
Also ist

$$f_1(x) = \sin((\phi + \alpha)x) = \sin(\phi x + \alpha x)$$
$$f_2(x) = \sin((\phi - \alpha)x) = \sin(\phi x - \alpha x)$$
$$f_1(x) + f_2(x) = \sin(\phi x + \alpha x) + \sin(\phi x - \alpha x)$$

Aufgabe 11 Beweise die trigonometrische Identität

$$\sin(\phi + \alpha) + \sin(\phi - \alpha) = 2\sin(\phi)\cos(\alpha).$$

Aufgabe 12 Nutze die Identität

$$\sin(\phi + \alpha) + \sin(\phi - \alpha) = 2\sin(\phi)\cos(\alpha)$$

um

$$f_1(x) + f_2(x) = \sin(\phi x + \varepsilon x) + \sin(\phi x - \varepsilon x)$$

zu einem Produkt umzuformen.

Wir sehen, dass die Schwebung eine Frequenz hat, die proportional zur Verstimmung α ist und unabhängig von ϕ. Dies wurde historisch zum Stimmen von Klavieren benutzt, da es einfacher ist, eine Schwebung von 1 Hz zu hören, als beispielsweise den Unterschied zwischen 440 Hz und 441 Hz.

4 Räumliche Interferenzen

Vielleicht kennt ihr das Phänomen, dass bei Konzerten an einigen Stellen im Raum der Sound irgendwie leiser, dumpfer oder schlechter zu verstehen ist. Das liegt an *destruktiver Interferenz* der Schallwellen aus 2 (oder mehr) unterschiedlichen Lautsprechern. Wir modellieren hier einen einfachen Fall: Wir haben 2 Lautsprecher, die einen Abstand $2l$ voneinander haben. Beide spielen den gleichen Sinuston der Frequenz f.

Übung Baut dieses Experiment auf. Lauft durch den Raum und findet die Stellen, an denen der Klang leise ist. Könnt ihr ein Muster erkennen und dieses auf dem Boden markieren?

Die Situation ist in diesem GeoGebra nachgebildet. `https://www.geogebra.org/m/dx7nadyu` Könnt ihr hier erkennen, wo die Wellen destruktiv interferieren? Deckt sich das mit euren vorherigen Beobachtungen?
Frage: Wie lassen sich die Regionen, auf denen sich die Sinuswellen aufheben, mathematisch beschreiben?

Antwort: Die Wellen heben sich genau dann auf, wenn ihre Phase um eine halbe Wellenlänge verschoben ist. Die Wellenlänge λ können wir aus der Frequenz berechnen mit

$$\lambda = \frac{c}{f},$$

wobei c die Schallgeschwindigkeit ist (ca. $343\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ bei $20\,\mathrm{C}$).

Aufgabe 13 Berechnet die Wellenlänge für die Frequenzen 100 Hz, 200 Hz, 343 Hz, 440 Hz und 2000 Hz.

Die Phase ist an genau den Orten um eine halbe Wellenlänge verschoben, die für ein $n \in \mathbb{N}_0$ um $\frac{\lambda}{2} + n\lambda$ näher an einem Lautsprecher sind als am anderen. Diese Kurven heißen *Hyperbeln*. Betrachten wir den Fall $n = 0$ genauer. Bezeichnen wir die Orte der beiden Lautsprecher mit L_1 und L_2, dann haben wir

$$H := \{P \in \mathbb{R}^2 \mid ||L_1P| - |L_2P|| = \frac{\lambda}{2}\}.$$

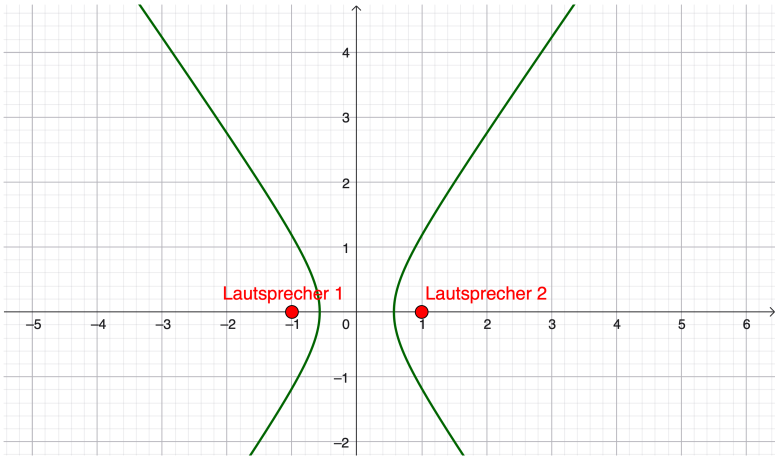
Legen wir nun die Koordinaten der Lautsprecher fest: $L_1 = (-l, 0)$ und $L_2 = (l, 0)$. und können H schreiben als

$$H := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left|\sqrt{(x+l)^2 + y^2} - \sqrt{(x-l)^2 + y^2}\right| = \frac{\lambda}{2}\right\},$$

was wir mit $a := \frac{\lambda}{4}$ und $b^2 := l^2 - \left(\frac{\lambda}{4}\right)^2$ umformen können zu

$$H := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}.$$

Diese Form nennt man *Mittelpunktsgleichung der Hyperbel* oder auch *Gleichung der Hyperbel in 1. Hauptlage*.
Für $l = 1$ und $f = 150\,\mathrm{Hz}$ sieht H so aus:



Andere Einstellungen könnt ihr selbst mit GeoGebra austesten: `https://www.geogebra.org/calculator/bh4xgdpn`

5 Exkurs: Musik und die OEIS

Die *Online Encyclopedia of Integer Sequences*, `oeis.org`, ist eine Datenbank von Zahlenfolgen. Habe ich eine kurze Folge von ganzen Zahlen, beispielsweise 1, 1, 2, 3, 5, so kann ich diese in die OEIS eingeben und bekomme Vorschläge, zu welcher Folge diese gehören könnten (natürlich die Fibonacci-Folge, aber auch noch ca. 10 andere Vorschläge).
Seit einiger Zeit lassen sich auf der OEIS Zahlenfolgen auch anhören. Hierfür wird aus den Zahlen ein MIDI-File erzeugt, in dem die Zahlenwerte die Tonhöhe bestimmen. In der Regel werden die Zahlen dabei modulo 88 gerechnet (weil ein Klavier 88 Tasten hat). Das hat unterschiedliche Zwecke:

- Über das Gehör ist es manchmal leichter, bestimmte Muster zu erkennen, z. B. Periodizität und andere Regelmäßigkeiten.
- Viele der Folgen liefern interessante Melodien und Rhythmen, die zur Produktion oder als Inspiration für Musik verwendet werden.

Die OEIS-Webseite kann die MIDI-Files bisher nicht selbst abspielen. Dafür wird ein Programm (MIDI-Sequencer) benötigt, oder es können andere Webanwendungen dafür genutzt werden. Eine einfach zu benutzende Webanwendung mit Visualisierung ist: `https://cifkao.github.io/html-midi-player/`.
Vorschläge für Folgen zum Anhören:

- Primzahlen: `https://oeis.org/play?seq=A000040`
- Fibonacci-Folge $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$: `https://oeis.org/play?seq=A000045`

- Recamán-Folge:

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{wenn } n = 0 \\ a_{n-1} - n & \text{wenn } a_{n-1} - n > 0 \text{ und noch nicht in der Folge} \\ a_{n-1} + n & \text{sonst} \end{cases}$$

  `https://oeis.org/play?seq=A005132`

- Anzahl der Schritte in der *Collatz-Folge* bis 1 erreicht wird: `https://oeis.org/play?seq=A006577`

6 Musik und Topologie

Topolgie beschäftigt sich, sehr kurz gesagt, mit den qualitativen Eingenschaften geometrischer Objekte. In der Musiktheorie tauchen immer wieder Fragen auf, die im Kern topologischer Natur sind: Wie lassen sich Töne, Intervalle, Akkorde und andere musikalische Objekte sinnvoll anordnen und darstellen, sodass ihre Beziehungen zueinander sichtbar werden.

Es gibt viele gute Ressourcen, die eine Einführung in die Topologie vermitteln, weswegen wir dies hier größtenteils aussparen. Ein Beispiel ist:
Was ist Topologie? `https://www.youtube.com/watch?v=C-eJW0gEm5w` (auf Englisch).

Eindimensional Wichtige topologische Bausteine in einer Dimension sind: Offenes Intervall $(0,1) \cong \mathbb{R}$, geschlossenes Intervall $[0,1] \cong \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$, Kreis $S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.
In welchem topologischen Raum lassen sich nun Töne sinnvoll darstellen? Das hängt davon ab, von welchem Standpunkt wir die Töne betrachten.
Interessiert uns nur die Frequenz, so erhalten wir ein offenes Intervall

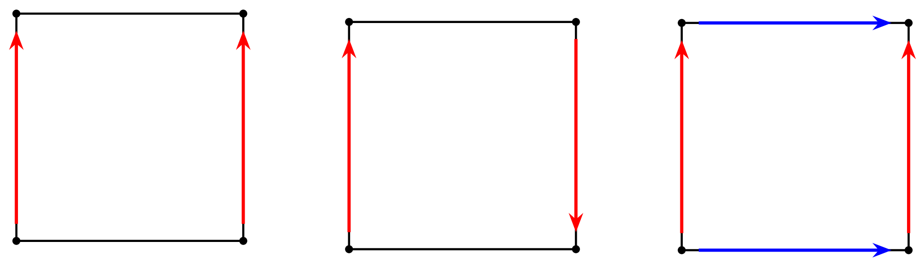
$$(0\,\text{Hz}, \infty\,\text{Hz}) \cong \mathbb{R}.$$

Interessieren uns nur unterschiedliche Töne innerhalb einer Oktave und ist uns die Lage der Oktave egal, so können wir die Töne, wie wir in einem vorherigen Abschnitt bereits gesehen, haben in einem Kreis, also der S^1 ordnen.
Wir modellieren hier das kontinuierliche Frequenzspektrum und betrachten diskrete Ton-Mengen später als Teilmenge davon.

Zweidimensional In 2 Dimensionen wird alles komplexer. Typische Beispiele für topologische Bausteine sind: Die Ebene $\mathbb{R}^2$, abgeschlossene Rechtecke $[0,1] \times [0,1]$, die Kugeloberfläche S^2, die Kugel B^2, der Torus $\mathbb{T}^2$, das Möbius-Band.

Eine übliche Methode dies darzustellen sind Diagramme, in denen durch Pfeile angezeigt wird, welche Seiten miteinander identifiziert (verklebt) werden:

Aufgabe 14 In welchem topologischen Raum lassen sich zwei gleichzeitig gespielte Frequenzen anordnen?



Zylinder Möbiusband Torus

Aufgabe 15 In welchem topologischen Raum lassen sich zei gleichzeitig gespielte Töne (also ein Intervall) anordnen, wenn wir nicht zwischen verschiedenen Oktaven unterscheiden?

Aufgabe 16 In welchem mathematischen Raum lassen sich *Akkorde* von 2 Tönen anordnen, wenn uns egal ist, in welcher Oktave die Töne liegen und in welcher Umkehrung (wenn uns also die Reihenfolge der Töne egal ist).

Mehrdimensional

Definition 1 (Konfigurationsraum) *Sei M eine Menge, dann bezeichnen wir den geordneten Konfigurationsraum in n Dimensionen von M mit*

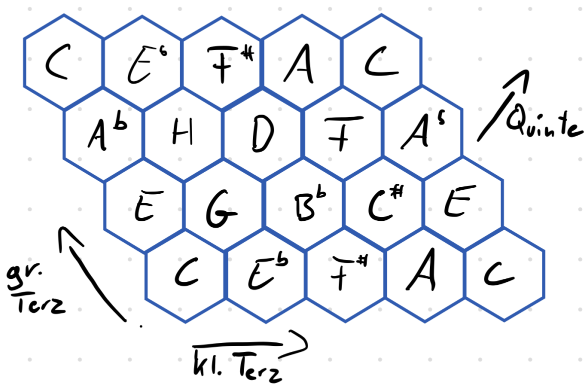
$$\mathrm{Conf}_n(M) := \{(m_1, \ldots, m_n) \mid m_i \neq m_j \forall i \neq j\}.$$

Die symmetrische Gruppe S_n operiert durch permutation der m_i auf $\mathrm{Conf}_n(M)$*. Der* ungeordnete Konfigurationsraum *ist definiert durch*

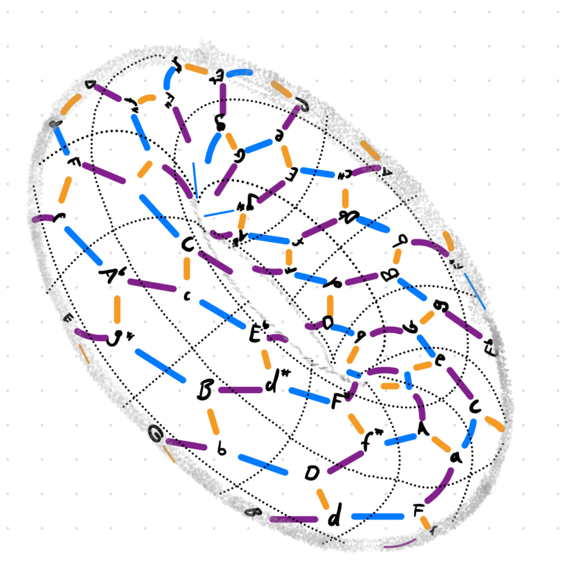
$$\mathrm{UConf}_n := \mathrm{Conf}_n(M)/S_n.$$

Im Allgemeinen bilden Akkorde aus n Tönen (wenn wir wieder die Umkehrungen als gleich betrachten) den sogenannten *ungeordneten Konfigurationsraum* $\mathrm{UConf}_n(S^1)$. Für $n = 3$ ist dies ein 3-Simplex mit ein paar Verklebungsvorschriften. Dieses Objekt lässt sich nicht in den $\mathbb{R}^3$ einbetten.

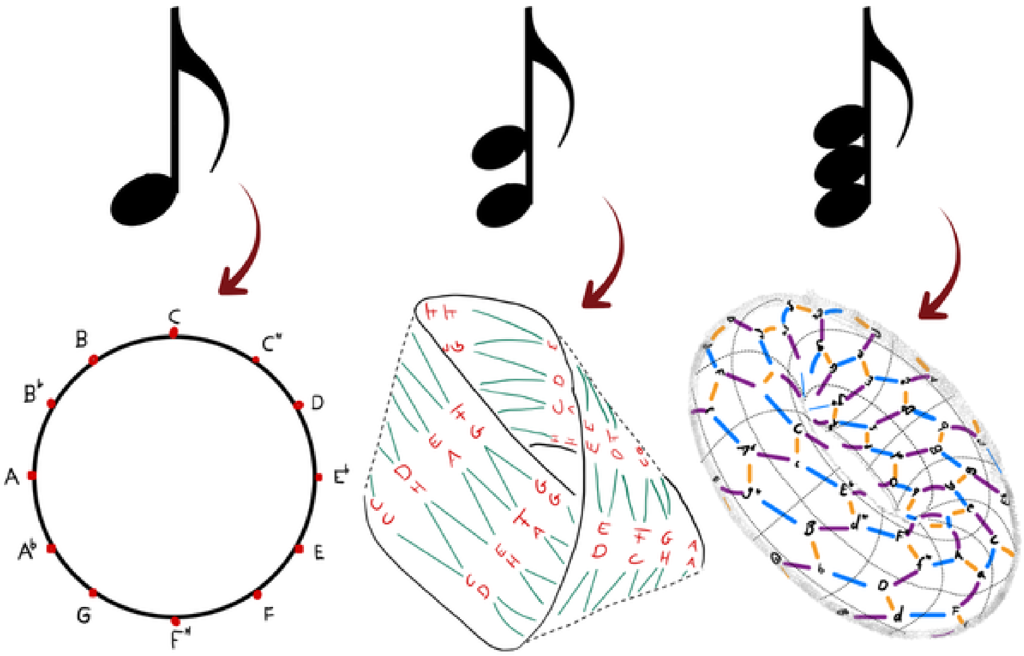
Harmonische Nähe Bisher haben wir Nähe im physikalischen Sinn verwendet, also Töne mit ähnlicher Tonhöhe als nah beieinander eingeordnet. Wir können allerdings auch eine Art harmonische Nähe betrachten: Dann liegen die Quinte und die Terz nah bei einem Ton, die Sekunde hingegen weiter weg. Eine historisch verwendete Sortierung ist, die 12 Töne der westlichen Musik in einem Sechseck-Gitter so anzuordnen, dass sie sich je nach Richtung um eine Quinte, eine kleine oder eine große Terz ändern.



Auf die Ecken können wir nun noch die Akkorde schreiben, die aus den drei angrenzenden Tönen bestehen. Wir erhalten so alle Dur- und Moll-Akkorde.
Wir sehen, dass diese Anordnung die Struktur eines Torus hat. Mit den Akkordsymbolen auf den Ecken (Dur=Großbruchstaben, Moll=Kleinbuchstaben) können wir das so visualisieren:



Der Raum der Dur- und Moll-Akkorde mit harmonischer Nähe ist also in gewisser Weise ein Torus.
Etwas vereinfacht können wir die Topologie der Noten also folgendermaßen zusammenfassen:



Weitere Ressourcen

Folgende Ressourcen können wir zur tieferen mathematischen beschäftigung mit dem Them empfehlen:

Es gibt ein sehr schönes Vorlesungsskript von Prof. Dr. Benedikt Löwe von der Uni Hamburg, das regelmäßig aktualisiert wird:
`https://www.math.uni-hamburg.de/spag/ml/Lehre/WS2324.MM.pdf`

Außerdem das sehr ausführliche Buch *Music: A mathematical offering* von Dave Benson (auf englisch), das dieser zum kostenfreien Download zur Verfügung stellt: `https://homepages.abdn.ac.uk/d.j.benson/pages/html/maths-music.html`

Lösungen

Lösung 1 Wir nummerieren die Töne, $c = 0$, $cis = 1, \dots, h = 11$ und rechnen modulo 12:

$$2 + 38 \equiv 4 \pmod{12}.$$

Ton 4 ist das e.

Lösung 2 (a) $x = 30$ ist die einzige Lösung.

(b) $x = 40$ ist eine Lösung. Es gibt unendlich viele weitere der Form $x = n \cdot 35 + 5$, für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) $x = 130$, ist eine von 5 Lösungen. Alle $x > 5$ mit $x \mid 130$ sind Lösungen.

Lösung 3 Wir bezeichnen die Frequenz eines Tones x mit $F(x)$, dann ist

$$F(A_0) = 2^{-4}F(A_4) = \frac{440}{16}\,\text{Hz} = 27{,}5\,\text{Hz}$$

$$F(A_7) = 2^{3}F(A_4) = 8 \cdot 440\,\text{Hz} = 3520\,\text{Hz}$$

Lösung 4 Die Anzahl der Oktaven ist der Logarithmus zur Basis 2 des Frequenzverhältnisses

$$\log_2\left(\frac{20.000}{20}\right) \approx 10.$$

Der Mensch kann also ca. 10 Oktaven hören.

Lösung 5 Einige Beispiele sind 220 Hz, $293\frac{1}{3}$ Hz, 330 Hz, 440 Hz, 528 Hz, 550 Hz, $586\frac{2}{3}$ Hz, 660 Hz, $733\frac{1}{3}$ Hz.
Töne können hier angehört/getestet werden:
https://onlinetonegenerator.com/multiple-tone-generator.html

Lösung 6 Das Frequenzverhältnis des letzten Tons zum ersten ist 81 : 80, seine Frequenz ist also 445,5 Hz.

Lösung 7 Es gibt natürlich verschiedene Antworten die in Frage kommen. Die beste Näherung unter den ersten 20 Tönen, ist der 12. Ton mit einer Frequenz von

$$440\text{Hz} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{12} \cdot 2^{-7} \approx 446\text{Hz}.$$

Das ist der Grund warum sich 12 Töne pro Oktave etabliert haben. Anders gesagt: Der Grund für 12 Töne pro Oktave ist, dass

$$3^{12} \approx 2^{19}.$$

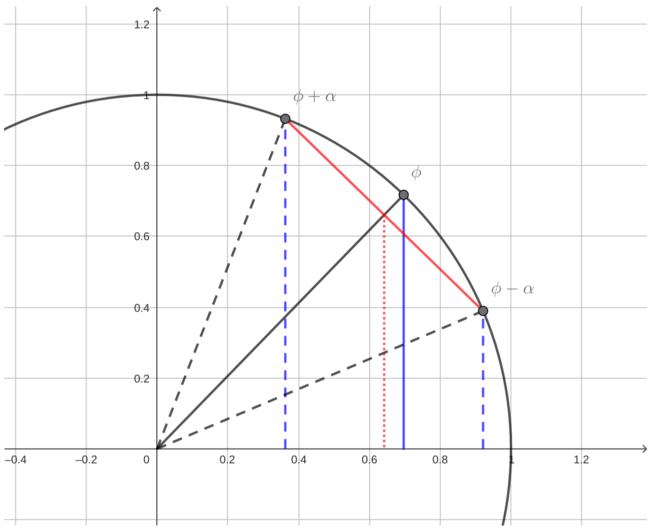
Lösung 8 Das Frequenzverhältnis ist 177147 : 262144 ≈ 1,48. Dies ist die sogenannte *Wolfsquinte*.

Lösung 9 Zwei benachbarte Töne müssen das Verhältnis $1 : \sqrt[12]{2}$ haben.

Ton	Frequenz (Hz)	Ton	Frequenz (Hz)
C4	261,63	F#4/G♭4	369,99
C#4/D♭4	277,18	G4	392,00
D4	293,66	G#4/A♭4	415,30
D#4/E♭4	311,13	A4	440,00
E4	329,63	A#4/B♭4	466,16
F4	349,23	H4	493,88

Lösung 10 Da $\sqrt[12]{2}$ irrational ist, können keine rationalen Zahlen außer 2^n mittels $\sqrt[12]{2}$ erzeugt werden.

Lösung 11 Durch geometrisches Argumentieren.



Lösung 12 Wir erhalten

$$f_1 + f_2 = 2\sin(\phi x)\cos(\alpha).$$

Lösung 13 .

Frequenz (Hz)	Wellenlänge (m)
100	3,43
200	1,715
343	1,00
440	0,780
2000	0,172

Lösung 14 Der Raum der Frequenzen war $(0,\infty)$, also lassen sich zwei Töne als $(0,\infty)\times(0,\infty) \sim \mathbb{R}^2$ darstellen. Da nun die Reihenfolge keine tolle spielt und wir 2 unterschiedliche Töne wollen bekommen wir

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\}.$$

Lösung 15 Wir betrachten nur die Töne einer Oktave, für ein Intervall spielt die Reihnefolge der Töne eine Rolle. Wir erhalten einen Torus:

$$S^1 \times S^1 \cong \mathbb{T}^2.$$

Lösung 16 Betrachten wir die zwei Töne als Akkord und ist uns (wie in der Musiktheorie oft üblich) auch egal welche Umkehrung wir haben, also welcher der zwei Töne der höhere ist, wir also z. B. $CG = GC$ setzen, so erhalten wir ein Möbiusband. Eine knappe, aber sehr schöne Illustration davon gibt es bei 3blue1brown zu sehen: `https://www.youtube.com/shorts/K-pGGb0f3tc`.