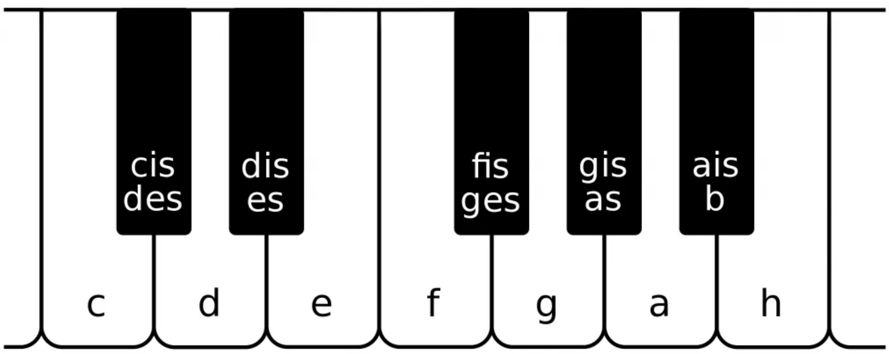
Musik og matematik

Hvad har stemning af et klaver at gøre med irrationaliteten af $\sqrt{2}$, og hvad har akkorder med topologi at gøre?
Fra musikteorien opstår der mange interessante matematiske spørgsmål.
Vi opsummerer her det vigtigste fra INTERREG-sessionen om dette emne. Derudover gives der indblik i yderligere emner inden for dette område, som vi har behandlet i kurser hos Mathe^{SH}.
Der kræves ingen musikalsk foruddannelse – det er jo et matematikprogram (men undervejs formidles også lidt musikteori). Løsningsskitser til opgaverne findes til sidst.

1 Lidt baggrund og knudreproblemer

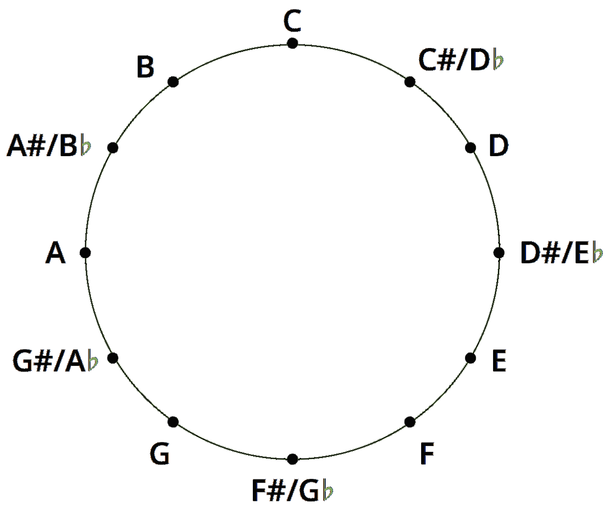
1.1 Tonerne som en cyklisk gruppe



I den nyere vestlige musik inddeles en oktav sædvanligvis i 12 halvtoneskridt, som ses her på klaviaturet. Efter H begynder vi igen med C. Det højere C opfattes i det væsentlige som den samme tone som det lavere C (bare højere).

Opgave 1 Begyndende ved D spilles en (kromatisk) løbefigur på klaveret på 38 halvtoneskridt opad. Hvilken tone slutter løbefiguren på?

Ligesom timerne på et ur har tonerne strukturen af en cyklisk gruppe, $\mathbb{Z}_{12}$. Anskueligt kan vi altså anordne tonerne på en cirkel (dvs. S^1):



Regning med modulo Den regneopereration, der bruges her, kaldes modulo. Formelt gælder:
Lad a, b og m være hele tal: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$, hvor $m \neq 0$. Der gælder: a og b er kongruente modulo m, hvis de giver samme rest ved division med m. Vi skriver:

$$a \equiv b \pmod{m}$$

Ellers er de inkongruente modulo m:

$$a \not\equiv b \pmod{m}$$

Opgave 2 Bestem en løsning for x og angiv, hvor mange løsninger der er i alt (der gælder $x \in \mathbb{N}$):

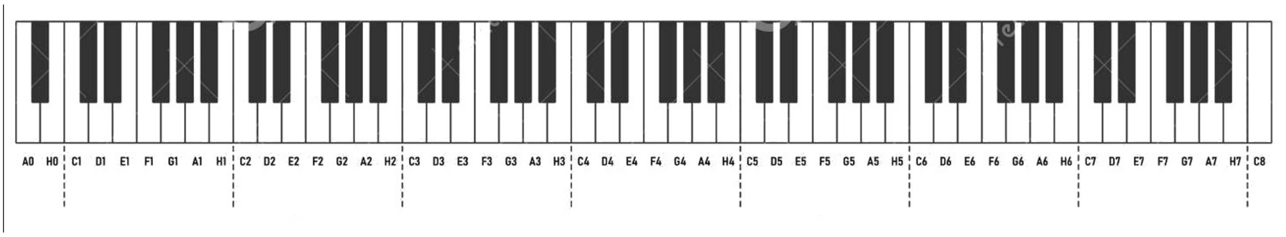
(a) $135 \equiv x \pmod{35}$

(b) $x \equiv 5 \pmod{35}$

(c) $135 \equiv 5 \pmod{x}$

1.2 Frekvenser

Tonehøjden bestemmes af *frekvensen*, dvs. hvor mange gange lyden svinger pr. sekund; enheden for én gang pr. sekund er *hertz*, vi skriver *Hz*. Det for mennesker hørbare område er ca. fra 20 Hz til 20.000 Hz = 20 kHz.
Et tonafstand på en oktav fordobler frekvensen. F.eks. har et A frekvensen 110 Hz, så har det næste højere A frekvensen 220 Hz. Generelt gælder: Toner, der har samme afstand (eller opfattes som havende samme afstand), har samme frekvensforhold. Menneskets opfattelse af tonehøjder er logaritmisk.
For at skelne toner i forskellige oktaver nummereres de ofte A_1, A_2 osv. En gængs nummerering orienterer sig efter klaveret. Der er den laveste tone A_0, den højeste C_8. Denne nummerering vil vi også bruge her.



Opgave 3 Tonen A_4, også kaldet kammertonen, stemmes sædvanligvis til 440 Hz (i orkestre og ved historiske opførelser også afvigende). Beregn frekvensen for A_0 og A_7.

Opgave 4 Beregn, hvor mange oktaver det menneskelige øre kan opfatte.

2 Harmonier

Den enkleste modellering af svingningen af en tone er en sinusfunktion (denne frembringer en såkaldt sinustone). Tonen A_4 kunne altså beskrives ved funktionen

$$f(t) = \sin(440 \cdot 2\pi\, t)$$

(hvis t har enheden sekund). Mere generelt kalder vi ϕ for *frekvensen* af funktionen

$$f(t) = \sin(\phi \cdot 2\pi\, t).$$

Et instrument frembringer sædvanligvis ikke sinustoner, men noget med mere klangfarve. Dette sker via *overtonerne*. *Overtoner* er toner med et heltalligt multiplum af grundtonens frekvens. For en tone med frekvens ϕ svinger altså også frekvenserne $2\phi, 3\phi, 4\phi \ldots$ med. Alt efter hvor fremtrædende de forskellige overtoner er, opstår der den specifikke klangfarve for et instrument.
Allerede i meget lang tid har mennesker spurgt sig selv, hvilke toner der lyder godt sammen. En gængs teori, der går tilbage til pythagoræerne (ca. 500 f.Kr.), er:

Toner lyder smukt sammen, når de har fælles overtoner.

Opgave 5 Find toner, der ifølge denne teori lyder godt sammen med A_4 (440 Hz). Begræns jer til toner, der ligger højst en oktav over eller under A_4.

Pythagoræerne beskrev dette princip med

Harmoniske toneintervaller står i små heltallige forhold.

Nogle af disse toneintervaller gav de navne (vi angiver her den latiniserede og i dag gængse version af disse navne):

Toneforhold	**Navn**
1 : 2	Oktav
2 : 3	Kvint
3 : 4	Kvart
4 : 5	(stor) Terts

2.1 Stemninger

Spilles der kun melodi og kan enhver tonehøjde frembringes (f.eks. sang), kan de ovennævnte rene intervaller blot intoneres efter hinanden.

Opgave 6 En melodi spilles på følgende måde: Den starter ved 440 Hz, går nu en kvint opad, to kvarter nedad, en kvint opad og afslutningsvis en terts nedad. Hvilken frekvens har den sidste tone?

Ren vokalmusik intoneres til dels stadig i disse rene intervaller. At grundtonen derved driver, er her ikke videre problematisk. Med instrumenter, der er stemt til faste toner, er dette dog ikke muligt.

Pythagoræisk stemning Forestil os, at vi ønsker at stemme et instrument med faste tonehøjder (f.eks. klaver). Vi beslutter os for i det mindste at beholde kvinten og oktaven i ren form. Med udgangspunkt i en grundtone, lad os sige A, går vi nu altid en kvint opad og en oktav nedad, så de resulterende toner ligger i oktaven over A.

Opgave 7 Denne proces vil aldrig ramme udgangstonen A præcist igen. Efter hvor mange skridt er vi i det mindste tæt på A igen og kan afslutte processen her?

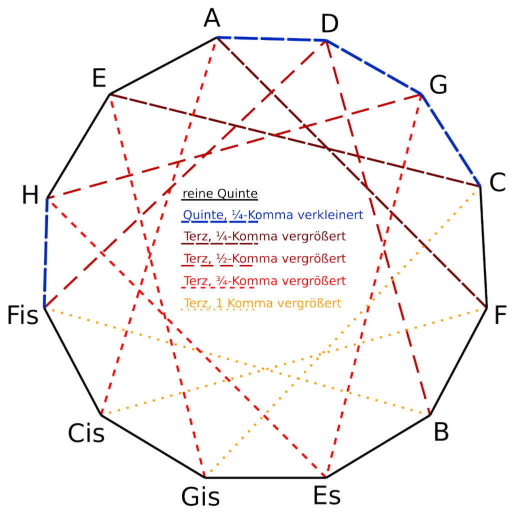
Sådan så pythagoræernes løsning også ud – den *pythagoræiske stemning*. Denne kan vi forestille os omtrent sådan:
Vi frembringer 11 yderligere toner fra A (i det følgende bruger vi kammertonen A_4 som udgangspunkt). Gå fra A_4 en kvint opad (og evt. en oktav nedad, så den nye tone ligger mellem A_4 og A_5). Gentag dette 5 gange. Gå fra A_4 en kvint nedad (og evt. en oktav opad, så den nye tone ligger mellem A_4 og A_5). Gentag dette 6 gange. De således opnåede toner betegner vi med:

$$\mathsf{Es} - \mathsf{B} - \mathsf{F} - \mathsf{C} - \mathsf{G} - \mathsf{D} - \mathsf{A} - \mathsf{E} - \mathsf{H} - \mathsf{Fis} - \mathsf{Cis} - \mathsf{Gis}.$$

Opgave 8 Bestem frekvensforholdet fra Gis til Es.

Denne for lille kvint "Gis – Es" kaldes ofte *ulvekvinten*.

En stærkt forkortet historie om nyere vestlige stemninger For at slippe af med den meget dissonant klingende ulvekvint blev der udviklet stemninger, hvor fejlen – kaldet det *pythagoræiske komma* – i stedet for at lægges på én kvint blev fordelt over flere. Disse blev dog ikke i første omgang fordelt ligeligt på alle 12 kvinter. Nogle af kvinterne blev holdt rene. Et velkendt eksempel er stemningen *Werckmeister III* fra slutningen af det 17. århundrede. Som det fremgår af grafikken (kilde: Cebus, CC0, Wikipedia), blev 8 kvinter stemt rene, og det pythagoræiske komma fordelt ligeligt på de øvrige fire.



Ligesvævende stemning Fordeles det pythagoræiske komma ligeligt på alle 12 kvinter, opnår vi den i dag gængse ligesvævende stemning.

Opgave 9 En 12-toners stemning skal kunne transponeres frit, dvs. frekvensforholdene i en melodi skal altid være de samme, uanset hvilken tone der startes fra. I hvilket frekvensforhold skal tonerne stå til hinanden? Bestem frekvenserne, når $A_4 = 440$ Hz.

Opgave 10 Vis, at der i den ligesvævende stemning ikke kan findes rene intervaller ud over oktaven.

3 Svingning (Beating)

Vi har allerede set, at toner kan modelleres som sinusfunktioner, der adskiller sig i deres frekvens. For at holde matematikken overskuelig vil vi i dette afsnit se bort fra overtonerne. Lad os forestille os følgende praktiske problem: To strenge, der skal give den samme tone, er let forstemte. Hvordan finder jeg ud af, hvor meget strengene er forstemte? Dette problem opstår, når jeg har to strenge af samme højde (f.eks. klaver), men på lignende vis også, når jeg har to strenge, der ligger et rent interval, f.eks. en kvint, fra hinanden.

Brug først et værktøj, f.eks. Online Tone Generator `https://onlinetonegenerator.com/multiple-tone-generator.html` til at frembringe og lytte til nogle eksempler af denne art. Beskriv, hvad I hører.

Interessante kombinationer er f.eks.:

- 440 Hz og 441 Hz
- 22 Hz og 23 Hz
- 220 Hz og 275 Hz
- 22 Hz og 27,5 Hz
- 15000 Hz og 15220 Hz
- 3 let forskellige toner

Se desuden visuelt på, hvad der sker her i Geogebra: `https://www.geogebra.org/m/asenrsed`.

Lad ϕ være middelværdien af de to frekvenser, så den ene streng har frekvens $\phi + \alpha$ og den anden frekvens $\phi - \alpha$.
Altså er

$$f_1(x) = \sin((\phi + \alpha)x) = \sin(\phi x + \alpha x)$$
$$f_2(x) = \sin((\phi - \alpha)x) = \sin(\phi x - \alpha x)$$
$$f_1(x) + f_2(x) = \sin(\phi x + \alpha x) + \sin(\phi x - \alpha x)$$

Opgave 11 Bevis den trigonometriske identitet

$$\sin(\phi + \alpha) + \sin(\phi - \alpha) = 2\sin(\phi)\cos(\alpha).$$

Opgave 12 Brug identiteten

$$\sin(\phi + \alpha) + \sin(\phi - \alpha) = 2\sin(\phi)\cos(\alpha)$$

til at omforme

$$f_1(x) + f_2(x) = \sin(\phi x + \varepsilon x) + \sin(\phi x - \varepsilon x)$$

til et produkt.

Vi ser, at svingningen har en frekvens, der er proportional med forstemningen α og uafhængig af ϕ. Dette blev historisk brugt til at stemme klaverer, da det er lettere at høre en svingning på 1 Hz end f.eks. forskellen mellem 440 Hz og 441 Hz.

4 Rumlige interferenser

Måske kender I fænomenet, at lyden på visse steder i et rum ved koncerter er på en eller anden måde mere stille, dæmpet eller sværere at forstå. Det skyldes *destruktiv interferens* af lydbølgerne fra 2 (eller flere) forskellige højttalere. Vi modellerer her et enkelt tilfælde: Vi har 2 højttalere med en indbyrdes afstand på $2l$. Begge afspiller den samme sinustone med frekvens f.

Øvelse Byg dette eksperiment op. Gå rundt i rummet og find de steder, hvor lyden er stille. Kan I genkende et mønster og markere det på gulvet?

Situationen er efterlignet i dette GeoGebra-applet. `https://www.geogebra.org/m/dx7nadyu` Kan I her genkende, hvor bølgerne interfererer destruktivt? Stemmer det overens med jeres tidligere observationer?
Spørgsmål: Hvordan kan de regioner, hvor sinusbølgerne ophæver hinanden, beskrives matematisk?

Svar: Bølgerne ophæver hinanden præcis, når deres fase er forskudt med en halv bølgelængde. Bølgelængden λ kan vi beregne ud fra frekvensen med

$$\lambda = \frac{c}{f},$$

hvor c er lydhastigheden (ca. $343\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ved $20\,\mathrm{C}$).

Opgave 13 Beregn bølgelængden for frekvenserne 100 Hz, 200 Hz, 343 Hz, 440 Hz og 2000 Hz.

Fasen er forskudt med præcis en halv bølgelængde på de steder, der for et $n \in \mathbb{N}_0$ ligger $\frac{\lambda}{2} + n\lambda$ tættere på den ene højttaler end den anden. Disse kurver kaldes *hyperbler*. Lad os betragte tilfældet $n = 0$ nærmere. Betegner vi højttalernes placering med L_1 og L_2, har vi

$$H := \{P \in \mathbb{R}^2 \mid ||L_1P| - |L_2P|| = \frac{\lambda}{2}\}.$$

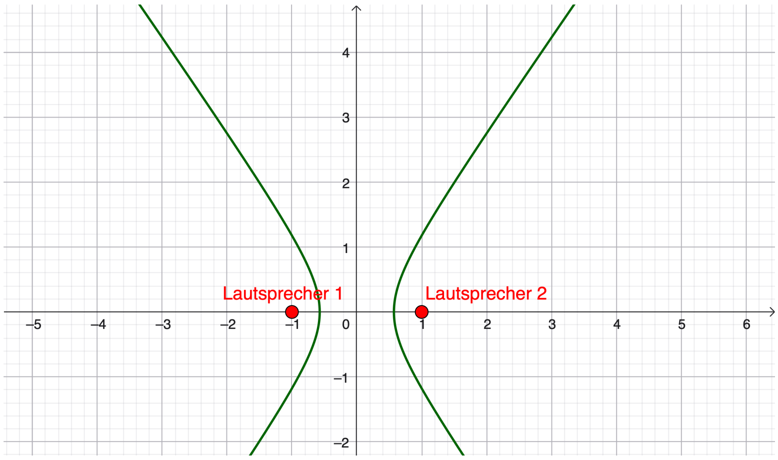
Fastlægger vi nu koordinaterne for højttalerne: $L_1 = (-l, 0)$ og $L_2 = (l, 0)$, kan vi skrive H som

$$H := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left|\sqrt{(x+l)^2 + y^2} - \sqrt{(x-l)^2 + y^2}\right| = \frac{\lambda}{2}\right\},$$

hvilket vi med $a := \frac{\lambda}{4}$ og $b^2 := l^2 - \left(\frac{\lambda}{4}\right)^2$ kan omforme til

$$H := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}.$$

Denne form kaldes *hyperbelens midtpunktsligning* eller også *hyperbelens ligning på 1. normalform*. For $l = 1$ og $f = 150\,\mathrm{Hz}$ ser H således ud:



Andre indstillinger kan I selv afprøve med GeoGebra: `https://www.geogebra.org/calculator/bh4xgdpn`

5 Ekskurs: Musik og OEIS

Online Encyclopedia of Integer Sequences, `oeis.org`, er en database over talfolger. Har jeg en kort følge af hele tal, f.eks. 1, 1, 2, 3, 5, kan jeg indtaste den i OEIS og få forslag til, hvilken følge den kan tilhøre (naturligvis Fibonacci-følgen, men også ca. 10 andre forslag).
Siden nogen tid tilbage kan talfolger på OEIS også lyttes til. Til dette formål genereres der fra tallene en MIDI-fil, hvor talværdierne bestemmer tonehøjden. Sædvanligvis beregnes tallene modulo 88 (fordi et klaver har 88 tangenter). Dette tjener forskellige formål:

- Via hørelsen er det sommetider lettere at genkende bestemte mønstre, f.eks. periodicitet og andre regelmæssigheder.
- Mange af følgerne giver interessante melodier og rytmer, der kan bruges til produktion af eller som inspiration til musik.

OEIS-hjemmesiden kan endnu ikke selv afspille MIDI-filerne. Hertil kræves et program (MIDI-sequencer), eller der kan benyttes andre webapplikationer. En nem webapplikation med visualisering er: `https://cifkao.github.io/html-midi-player/`.
Forslag til følger at lytte til:

- Primtal: `https://oeis.org/play?seq=A000040`
- Fibonacci-følgen $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$: `https://oeis.org/play?seq=A000045`
- Recamán-følgen:

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{hvis } n = 0 \\ a_{n-1} - n & \text{hvis } a_{n-1} - n > 0 \text{ og endnu ikke i følgen} \\ a_{n-1} + n & \text{ellers} \end{cases}$$

`https://oeis.org/play?seq=A005132`

- Antal skridt i *Collatz-følgen*, indtil 1 nås: `https://oeis.org/play?seq=A006577`

6 Musik og topologi

Topologi beskæftiger sig, meget kort sagt, med de kvalitative egenskaber ved geometriske objekter. I musikteorien dukker der igen og igen spørgsmål op, der i kernen er af topologisk natur: Hvordan kan man meningsfuldt anordne og repræsentere toner, intervaller, akkorder og andre musikalske objekter, så deres indbyrdes relationer bliver synlige.

Der findes mange gode ressourcer, der giver en introduktion til topologi, hvorfor vi i høj grad udelader dette her. Et eksempel er:
Hvad er topologi? `https://www.youtube.com/watch?v=C-eJW0gEm5w` (på engelsk).

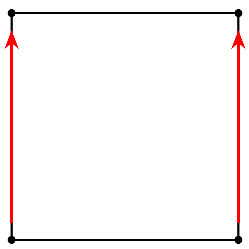
Endimensionalt Vigtige topologiske byggesten i én dimension er: Åbent interval $(0,1) \cong \mathbb{R}$, lukket interval $[0,1] \cong \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$, cirkel $S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.
I hvilket topologisk rum lader toner sig nu meningsfuldt repræsentere? Det afhænger af, fra hvilket standpunkt vi betragter tonerne.
Interesserer vi os kun for frekvensen, opnår vi et åbent interval

$$(0\,\mathrm{Hz}, \infty\,\mathrm{Hz}) \cong \mathbb{R}.$$

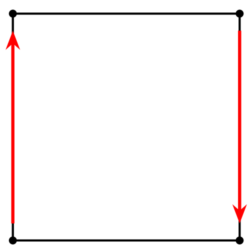
Interesserer vi os kun for forskellige toner inden for én oktav og er vi ligeglade med oktavens placering, kan vi anordne tonerne, som vi allerede har set i et tidligere afsnit, på en cirkel, dvs. S^1.
Vi modellerer her det kontinuerte frekvensspektrum og betragterdiskrete tonemængder senere som delmængder heraf.

Todimensionalt I 2 dimensioner bliver alt mere komplekst. Typiske eksempler på topologiske byggesten er: Planen $\mathbb{R}^2$, lukkede rektangler $[0,1] \times [0,1]$, kugleoverfladen S^2, kuglen B^2, torusen $\mathbb{T}^2$, Möbiusbåndet.

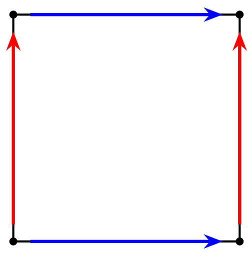
En sædvanlig metode til at illustrere dette er diagrammer, hvor pile angiver, hvilke sider der identificeres (klistres sammen):



Cylinder



Möbiusbånd



Torus

Opgave 14 I hvilket topologisk rum kan to samtidigt spillede frekvenser anordnes?

Opgave 15 I hvilket topologisk rum kan to samtidigt spillede toner (dvs. et interval) anordnes, hvis vi ikke skelner mellem forskellige oktaver?

Opgave 16 I hvilket matematisk rum kan *akkorder* af 2 toner anordnes, hvis vi er ligeglade med, hvilken oktav tonerne ligger i, og hvilken omvending der er tale om (dvs. rækkefølgen af tonerne er ligegyldig)?

Flerdimensionalt

Definition 1 (Konfigurationsrum) *Lad M være en mængde, så betegner vi det ordnede konfigurationsrum i n dimensioner af M med*

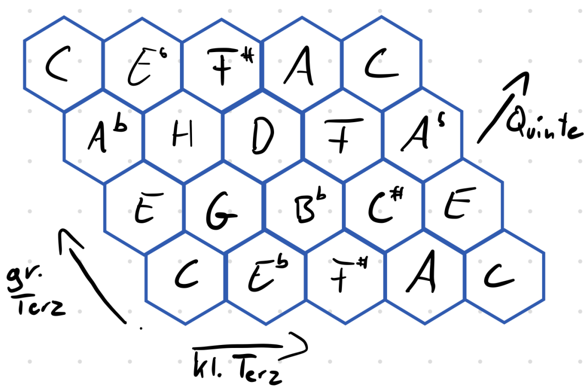
$$\mathrm{Conf}_n(M) := \{(m_1, \dots, m_n) \mid m_i \neq m_j \ \forall i \neq j\}.$$

Den symmetriske gruppe S_n virker ved permutation af m_i på $\mathrm{Conf}_n(M)$. Det uordnede konfigurationsrum *er defineret ved*

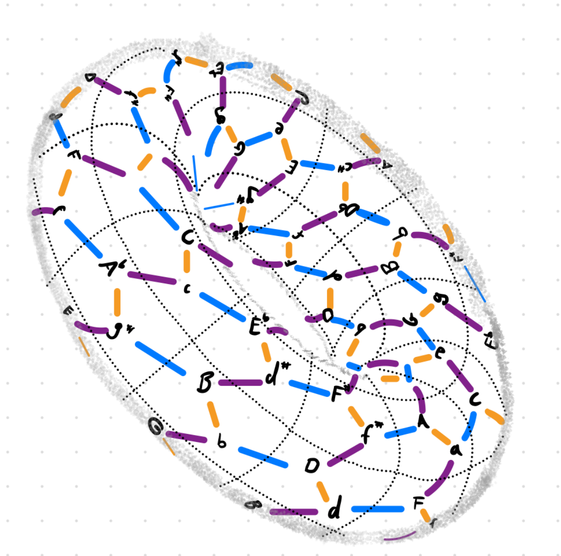
$$\mathrm{UConf}_n := \mathrm{Conf}_n(M)/S_n.$$

Generelt danner akkorder af n toner (når vi igen betrager omvendinger som ens) det såkaldte *uordnede konfigurationsrum* $\mathrm{UConf}_n(S^1)$. For $n = 3$ er dette en 3-simplex med nogle sammenklistringsbetingelser. Dette objekt lader sig ikke indlejre i $\mathbb{R}^3$.

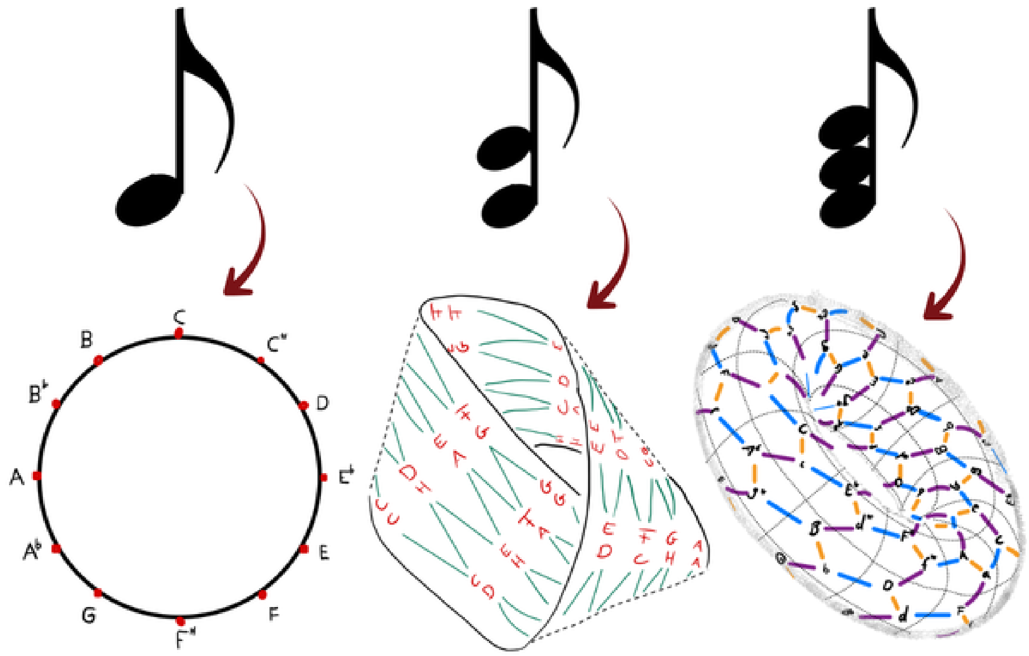
Harmonisk nærhed Hidtil har vi brugt nærhed i fysisk forstand, dvs. toner med lignende tonehøjde er placeret tæt på hinanden. Vi kan dog også betragte en slags harmonisk nærhed: Da ligger kvinten og tertsen tæt ved en tone, mens sekunden ligger længere væk. En historisk anvendt sortering er at anordne de 12 toner i den vestlige musik i et sekskantsgitter, så de ændrer sig med en kvint, en lille eller en stor terts alt efter retningen.



På hjørnerne kan vi nu også skrive de akkorder, der består af de tre tilstødende toner. Vi opnår dermed alle dur- og molakkorder.
Vi ser, at denne anordning har strukturen af en torus. Med akkordnavnene på hjørnerne (dur = store bogstaver, mol = lille bogstaver) kan vi visualisere det sådan:



Rummet for dur- og molakkorder med harmonisk nærhed er altså i en vis forstand en torus. Lidt forenklet kan vi altså opsummere topologien for noder som følger:



Yderligere ressourcer

Følgende ressourcer kan vi anbefale til dybere matematisk beskæftigelse med emnet:

Der findes et meget flot forelæsningskompendium af prof. dr. Benedikt Löwe fra Universitetet i Hamborg, der opdateres regelmæssigt:

https://www.math.uni-hamburg.de/spag/ml/Lehre/WS2324.MM.pdf

Desuden den meget udførlige bog *Music: A mathematical offering* af Dave Benson (på engelsk), som han stiller til rådighed til gratis download: https://homepages.abdn.ac.uk/d.j.benson/pages/html/maths-music.html

Løsninger

Løsning 1 Vi nummererer tonerne, $c = 0$, $cis = 1, \ldots, h = 11$ og regner modulo 12:

$$2 + 38 \equiv 4 \pmod{12}.$$

Tone 4 er e.

Løsning 2 (a) $x = 30$ er den eneste løsning.

(b) $x = 40$ er én løsning. Der findes uendeligt mange andre af formen $x = n \cdot 35 + 5$, for alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) $x = 130$ er én af 5 løsninger. Alle $x > 5$ med $x \mid 130$ er løsninger.

Løsning 3 Vi betegner frekvensen af en tone x med $F(x)$, så er

$$F(A_0) = 2^{-4}F(A_4) = \frac{440}{16} \text{ Hz} = 27{,}5 \text{ Hz}$$

$$F(A_7) = 2^3 F(A_4) = 8 \cdot 440 \text{ Hz} = 3520 \text{ Hz}$$

Løsning 4 Antallet af oktaver er logaritmen med grundtal 2 af frekvensforholdet:

$$\log_2\left(\frac{20.000}{20}\right) \approx 10.$$

Mennesket kan altså høre ca. 10 oktaver.

Løsning 5 Nogle eksempler er 220 Hz, $293\frac{1}{3}$ Hz, 330 Hz, 440 Hz, 528 Hz, 550 Hz, $586\frac{2}{3}$ Hz, 660 Hz, $733\frac{1}{3}$ Hz.
Toner kan lyttes til og testes her:
https://onlinetonegenerator.com/multiple-tone-generator.html

Løsning 6 Frekvensforholdet for den sidste tone til den første er 81 : 80, dens frekvens er altså 445,5 Hz.

Løsning 7 Der er naturligvis forskellige mulige svar. Den bedste tilnærmelse blandt de første 20 toner er den 12. tone med en frekvens på

$$440 \text{ Hz} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{12} \cdot 2^{-7} \approx 446 \text{ Hz}.$$

Det er grunden til, at 12 toner pr. oktav har etableret sig. Sagt på en anden måde: Grunden til 12 toner pr. oktav er, at

$$3^{12} \approx 2^{19}.$$

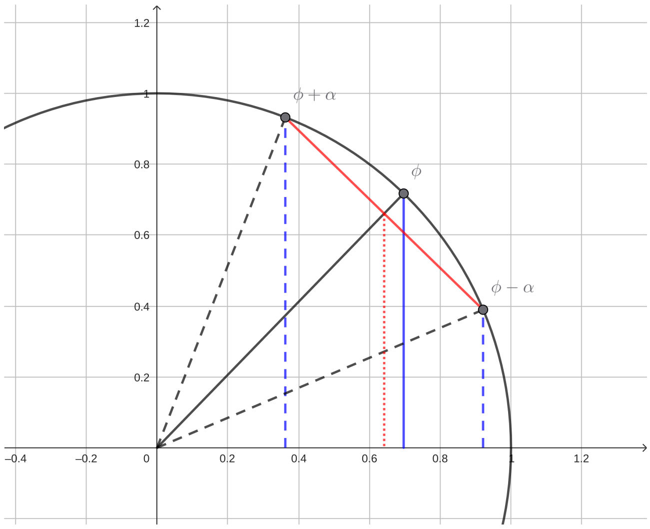
Løsning 8 Frekvensforholdet er 177147 : 262144 ≈ 1,48. Dette er den såkaldte *ulvekvint*.

Løsning 9 To nabotoner skal have forholdet $1 : \sqrt[12]{2}$.

Tone	Frekvens (Hz)	Tone	Frekvens (Hz)
C4	261,63	F#4/G♭4	369,99
C#4/D♭4	277,18	G4	392,00
D4	293,66	G#4/A♭4	415,30
D#4/E♭4	311,13	A4	440,00
E4	329,63	A#4/B♭4	466,16
F4	349,23	H4	493,88

Løsning 10 Da $\sqrt[12]{2}$ er irrational, kan der ikke frembringes rationelle tal ud over 2^n ved hjælp af $\sqrt[12]{2}$.

Løsning 11 Ved geometrisk argumentation.



Løsning 12 Vi opnår

$$f_1 + f_2 = 2\sin(\phi x)\cos(\alpha x).$$

Løsning 13

Frekvens (Hz)	Bølgelængde (m)
100	3,43
200	1,715
343	1,00
440	0,780
2000	0,172

Løsning 14 Frekvensrummet var $(0,\infty)$, så to toner kan repræsenteres som $(0,\infty)\times(0,\infty) \sim \mathbb{R}^2$. Da rækkefølgen ikke spiller en rolle, og vi ønsker 2 forskellige toner, opnår vi

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\}.$$

Løsning 15 Vi betragter kun tonerne i én oktav; for et interval spiller rækkefølgen af tonerne en rolle. Vi opnår en torus:

$$S^1 \times S^1 \cong \mathbb{T}^2.$$

Løsning 16 Betragter vi de to toner som en akkord og er vi ligeglade med (som det ofte er tilfældet i musikteorien), hvilken omvending der er tale om – dvs. hvilken af de to toner der er den højere, vi altså sætter f.eks. $CG = GC$ – opnår vi et Möbiusbånd. En kort men meget smuk illustration heraf kan ses hos 3blue1brown: `https://www.youtube.com/shorts/K-pGGb0f3tc`.