Linksradikale Zahlen

Merlin Carl und Michael Schmitz

17.02.2021

Einheit im Rahmen der Online Winter School Mathematik der Abteilung für Mathematik der Europa-Universität Flensburg

Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassung

- 'Linksradikale' Zahldarstellungen erlauben unendlich viele Ziffern vor dem Komma.
- Diese finden in der Mathematik tatsächlich Anwendung (Näheres gleich), sie werden üblicherweise **10-adische Zahldarstellungen** genannt.
- Die erste 10-adische Darstellung, die wir betrachtet haben, ist

$$\overleftarrow{9} = ...999 = -1.$$

- Man beachte, dass es sich hierbei um keine Zahldarstellung im gewöhnlichen Sinne handelt, denn

$$9 + 90 + 900 + 9000 + ... > 0.$$

- Trotzdem arbeiten wir mit den gewohnten Rechenregeln, wobei Überträge 'bis ins Unendliche laufen können'.

Zusammenfassung

- Jede natürliche Zahl kann durch Davorsetzen von unendlich vielen Nullen als 10-adisch aufgefasst werden, z.B.

$$27 = ...00027 = \overleftarrow{0}\,27.$$

- Jede negative ganze Zahl besitzt eine 10-adische Darstellung ('Komplement'), die ohne Vorzeichen auskommt, z.B.

$$-428 = ...999572 = \overleftarrow{9}\,572.$$

- Für jedes $x \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(10, x) = 1$ besitzt $-1/x$ (also auch $1/x$) eine 10-adische Darstellung, z.B.

$$-1/7 = \overleftarrow{142857}, \quad 1/7 = \overleftarrow{285714}3, \quad \text{Beachte: } 1/7 = 0,\overline{142857}.$$

Zusammenfassung

- Damit besitzen alle rationalen Zahlen mit rein periodischen Dezimaldarstellungen auch 10-adische Darstellungen.
- Lässt man auch bei 10-adischen Darstellungen endliche viele Stellen nach dem Komma zu, so erhält man zudem 10-adische Darstellungen für alle rationalen Zahlen mit endlichen oder gemischt periodischen Dezimaldarstellungen.
- Somit besitzt jede rationale Zahl eine 10-adische Darstellung.
- Alle schriftlichen Rechenverfahren funktionieren im Wesentlichen wie gewohnt. Der Divisionsalgorithmus verläuft hier von rechts nach links, wie die drei anderen Algorithmen.

Ausblick

- Neben einigen Vorteilen (Zahldarstellungen ohne Vorzeichen, Rechenalgorithmen sehr gut mit der Zahldarstellung verträglich) besitzen die 10-adischen Zahlen auch gewisse Nachteile, z.B. gibt es so genannte Nullteiler, d.h. Zahlen $x, y \neq 0$ mit $x \cdot y = 0$.
- Diese Nachteile vermeidet man, wenn man statt 10-adischen Zahlen ***p*-adische Zahlen** verwendet, wobei p eine Primzahl ist.
- Das heißt man stellt die Zahlen mit Hilfe der Ziffern $0, 1, \ldots, p-1$ zur Basis p dar und lässt wieder unendlich viele Ziffern vor dem Komma zu.
- Beispiel einer 7-adischen Darstellung:

$$(\ldots 000103)_7 = 52, \quad \text{denn } \mathbf{1} \cdot 7^2 + \mathbf{0} \cdot 7^1 + \mathbf{3} \cdot 7^0 = 52.$$

- Die 7-adische Darstellung der -1 ist ...666.

Ausblick

- p-adische Zahldarstellungen sind ein ernsthaftes mathematisches Werkzeug und besitzen viele Anwendungen, z.B.
  - in der Zahlentheorie (Andrew Wiles' berühmter Beweis von Fermat's letztem Satz verwendet sie),
  - in der Quantenphysik,
  - in der String-Theorie,
  - auf dem Gebiet der Differentialgleichungen,
  - in der Stochastik,
  - in der Kombinatorik,
  - bei der Kodierung von Informationen,
  - in der Informatik,
  - in den kognitiven Wissenschaften, der Psychologie und Soziologie,
  - ...

So kann aus einer ziemlich 'bescheuerten' Idee manchmal ganz schön gute Mathematik werden...

Bei mehr Interesse an diesem Thema

Quellen

- A. Rich. Leftist Numbers. The College Mathematics Journal, Vol. 39, No. 5, November 2008, pp. 330-336 https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/07468342.2008.11922313?journalCode=ucmj20
- E. C. R. Hehner, R. N. Horspool. A New Representation of the Rational Numbers for Fast Easy Arithmetic. SIAM J. Comput., 8(2), pp. 124–134. https://www.researchgate.net/publication/220617770_A_New_Representation_of_the_Rational_Numbers_for_Fast_Easy_Arithmetic
- U. A. Rozikov, What are p-Adic Numbers? What are They Used for? https://www.asiapacific-mathnews.com/03/0304/0001_0006.pdf
- Wikipedia-Artikel zu p-adischen Zahlen. https://de.wikipedia.org/wiki/P-adische_Zahl