ÜBUNG 3

Abgabe der Bearbeitungen bis Freitag, den 7. Oktober bis 10 Uhr

Was bisher geschah: Sei Ω eine nichtleere abzählbare Menge (aufgefasst als Sammlung möglicher Ergebnisse bei einem Zufallsexperimentes), die so genannte *Grund- oder Ergebnismenge*. Jede Teilmenge T der Grundmenge oder - anders ausgesprochen - jedes Element der Potenzmenge der Grundmenge wird als ein *Ereignis* (des Zufallsexperimentes) bezeichnet. Die Elemente $\omega \in \Omega$ werden *Elementarergebnisse (elementary events)* genannt. Hat Ω eine Mächtigkeit von $n \in \mathbb{N}$ Elementen, so hat man also 2^n Ereignisse, da $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^n$.
Eine *Wahrscheinlichkeit auf der Grundmenge(probability)* wird nun als Funktion P mit $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0{,}1]$, $T \mapsto P(T) \in [0{,}1]$ mit zwei zentralen Eigenschaften definiert, nämlich

- $P(\Omega) = 1$, und
- $P(\bigcup_{i\in I} T_i) = \sum_{i\in I} P(T_i)$, für alle paarweisen disjunkten $(T_i)_{i\in I}$, d.h $T_i \cap T_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$, wobei i und j Elemente einer (abzählbaren) Indexmenge sind.

Das Paar (Ω, P) wird dann *Wahrscheinlichkeitsraum (probability space)* genannt.

Bei vielen Zufallsexperimenten existieren nur eine endliche Anzahl von Ergebnissen, wie beispielsweise beim Würfeln zweier Würfel, beim Münzwurf, bei vielen Kartenspielen. Wir definieren daher: Ist die Grundmenge eines Wahrscheinlichkeitsraumes endlich, so nennen wir das Paar (Ω, P) einen *endlichen Wahrscheinlichkeitsraum.*
Unter diesen endlichen „Voraussetzungen“ werden wir dann solche Zufallsexperimente bzw. dazu modellierte Wahrscheinlichkeitsräume am kommenden Montag kennenlernen (bzw. kennen Sie natürlich schon), in denen jedes Ergebnis **dieselbe** Wahrscheinlichkeit zugeordnet wird. Solche Wahrscheinlichkeiten (auf endlichen Mengen) nennen wir *Laplace-Wahrscheinlichkeiten* bzw. den zugehörigen Raum *Laplaceartig* oder *Laplace-Raum.* Noch einmal:
Definition. Sei Ω eine (nichtleere) endliche Menge. Eine Wahrscheinlichkeit(sfunktion) P heißt *Laplace-Wahrscheinlichkeit* genau dann, wenn für alle (Elementar-)Ergebnisse $\omega \in \Omega$ bzw. Ereignisse $\{\omega\} \subseteq \Omega$ gilt:

- $P(\{\omega\}) = \dfrac{1}{|\Omega|}$, wobei $|\Omega|$ die Anzahl der Elemente der Grund- oder Ergebnismenge, sprich die Anzahl der Elementarergebnisse bezeichnet.

Für jedes Ereignis $T \subseteq \Omega$ kann man in diesen endlichen Fällen offenbar die Wahrscheinlichkeit leicht ausrechnen, denn es gilt die so genannte Laplace-Formel (warum?):

- $P(T) = \dfrac{|T|}{|\Omega|}$, wobei man die Elemente aus T auch als *günstige Fälle* bezeichnet und die Laplace-Formel als die *Wahrscheinlichkeit der Anzahl der günstigen Fälle geteilt durch die Anzahl aller möglichen Fälle* ausspricht.

Wenden wir uns nun einigen Aufgaben aus diesem Kontext zu, wobei - wenn nicht erwähnt - stets eine passende Grundmenge Ω angegeben werden soll.

Aufgabe 1

Von zwei Urnen enthält die Urne I eine schwarze Kugel und zwei rote Kugeln, die Urne II zwei schwarze Kugeln und eine rote Kugel. Das Experiment besteht darin, zuerst eine Urne auszusuchen und dann daraus eine Kugel zu ziehen. Man definiere mindestens drei passende Ereignisräume.

Aufgabe 2

In einer Schachtel sind r rote und w (durch den Tastsinn nicht unterscheidbare) weiße Kugeln. Eine Kugel wird blind herausgenommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um eine rote (um keine rote) Kugel handelt.

Aufgabe 3

In einer Schachtel sind genau 100 Kugeln. Diese Kugeln sind jeweils beginnend mit 00, dann 0, 02, ... bis 99 durchnummeriert. Sei A die erste, B die zweite Ziffer. Geben Sie einen dazu passenden Laplace-Raum an und formalisieren und beantworten Sie die Fragen zu: Wie groß ist beim zufälligen Ziehen einer Kugel aus der Schachtel die Wahrscheinlichkeit, dass

(a) die erste Ziffer eine 3 ist,
(b) die zweite Ziffer durch 4 teilbar ist,
(c) die erste Ziffer von der zweiten Ziffer verschieden ist,
(d) die Summer der beiden Ziffern ungleich 7 sind?

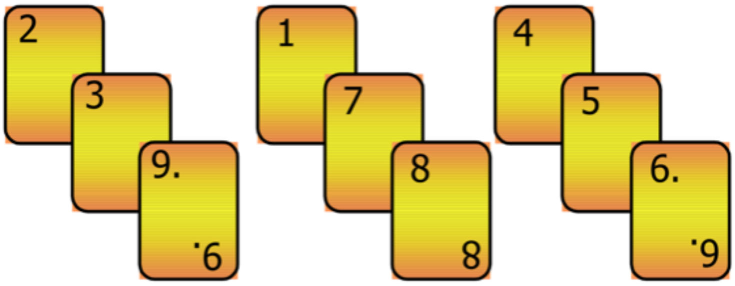
Aufgabe 4

In einem Karton sind 10 Glühbirnen, wobei die eine Hälfte der Birnen brauchbar, die andere unbrauchbar ist. Jens zieht blind 4 Birnen aus dem Karton. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass

(a) alle gezogenen Birnen unbrauchbar sind,
(b) mindestens zwei brauchbare Birnen dabei sind,
(c) höchstens drei brauchbare Birnen dabei sind,
(d) zwei brauchbare und zwei unbrauchbare Birnen dabei sind?

Aufgabe 5

Diese Aufgabe kennen Sie schon: Neun Karten werden so ausgelegt wie in der folgenden Abbildung.



Zwei Spieler wählen nacheinander einen Kartenhaufen. Jeder Spieler mischt seinen Kartenhaufen verdeckt und zieht daraus eine Karte. Gewonnen hat derjenige, dessen Karte eine höhere Zahl zeigt. Für ein neues Spiel wird die Karte in den jeweiligen Stapel zurückgelegt. Die Spieler wählen nacheinander einen Kartenstapel. Es wird erneut gemischt und eine Karte aus dem Stapel gezogen. Wer gewinnt auf lange Sicht. Modellieren Sie die Situation für jede Wahl der Kartenstapel durch die Spieler durch Angabe von passenden W.-Räumen (Laplaceartig).

Aufgabe 6

In einem Sockenfach liegen 6 grüne, 4 blaue und 3 weißen Socken. Sie wählen mit verbundenen Augen zufällig zwei Socken aus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Socken dieselbe Farben haben? *Hinweis: Eine mögliche Laplace-Ergebnismenge hat 156 Elemente.*