Petra Scherer & Hans-Georg Weigand

Mathematikdidaktische Prinzipien

In der Pädagogik haben didaktische Regeln, Gesetze oder Prinzipien eine lange Tradition, wenn man etwa an das „Prinzip der Naturgemäßheit" nach Johann Amos Comenius (1592–1670) oder das „Prinzip der Anschauung" gemäß Adolph Diesterweg (1790–1866) denkt. Unterrichts- oder didaktische Prinzipien sind Regeln für die Gestaltung und Beurteilung von Unterricht, die auf normativen Überlegungen einerseits und praktischen Unterrichtserfahrungen sowie empirischen Erkenntnissen andererseits aufbauen. Sie beziehen Ergebnisse der psychologischen Lerntheorien ein und stellen Erfahrungen aus der Unterrichtspraxis verdichtet und verkürzt dar. Unterrichtsprinzipien sind sowohl konstruktive Regeln für die Gestaltung von Unterricht als auch Kriterien für die Analyse und Beurteilung von Unterricht. In der mathematikdidaktischen Literatur lässt sich eine Vielzahl didaktischer Prinzipien finden (vgl. etwa Zech 1996; Wittmann 1981; Winter 1991; Krauthausen & Scherer 2007):

- Spiralprinzip
- Genetisches Prinzip
- Sokratisches Prinzip
- Exemplarisches Prinzip
- Prinzip des (gelenkten) Entdeckenden Lernens
- Prinzip der Realitätsnähe oder Lebensnähe
- Prinzip der integrierten Wiederholung
- Prinzip der Isolation der Schwierigkeiten
- Prinzip der Selbsttätigkeit/Prinzip des aktiven Lernens
- Operatives Prinzip
- Prinzip der Variation
- Prinzip der Variation der Veranschaulichungsmittel/Prinzip der adäquaten Visualisierung
- …

Die Anwendbarkeit derartiger didaktischer Prinzipien im Unterricht ist stets in Wechselbeziehung zu Zielen, Wissen und Können der Lernenden zu beurteilen. Ferner muss ein Prinzip im Unterricht stets auch in Beziehung und in Abgrenzung zu anderen Prinzipien gesehen werden.

Im Folgenden sollen einige didaktische Prinzipien herausgestellt werden, die für den Mathematikunterricht als besonders wichtig anzusehen sind.

1 Spiralprinzip und Orientierung an Leitideen

Die Inhalte des Mathematikunterrichts dürfen nicht in unzusammenhängende Gebiete zerfallen, sondern Lernende sollen *Beziehungslinien* oder *-netze* im Mathematiklehrgang erkennen. Derartige „rote Fäden" sollen den Lernenden eine Orientierung in der Stofffülle einer Wissenschaft geben und die Grundzüge oder *Fundamentale Ideen* des Fachs unter einem bestimmten Aspekt aufzeigen. Sie orientieren sich an Begriffen oder Aktivitäten des Mathematikunterrichts, wie etwa Algorithmus, Funktion, Linearität, Invarianz, Approximation oder Modellbildung, bzw. an Prozesszielen wie Argumentieren, Beweisen, Optimieren, Auffinden von Zusammenhängen sowie der Bildung zentraler Begriffe wie Zahl, Funktion, Dreieck oder Kugel. Der amerikanische Entwicklungs- und Kognitionspsychologe Jerome Bruner (1915–2016) geht in seinem Buch „Der Prozess der Erziehung" von der mittlerweile berühmten Hypothese aus, dass auf jeder Entwicklungsstufe jeder Gegenstand in einer intellektuell ehrlichen Form gelehrt werden kann (Bruner 1970, S. 44). Folglich plädiert er für ein *spiraliges Curriculum*, das die Grundbegriffe auf verschiedenen kognitiven und sprachlichen Niveaus bis hin zu abstrakten formalisierten Darstellungen immer wieder aufgreift. Hans Werner Heymann (1996) hat sich ausführlich mit zentralen Ideen für den Mathematikunterricht auseinandergesetzt und er möchte anhand dieser Ideen die „Universalität der Mathematik" (S. 158) und „ihre Bedeutung für die Gesamtkultur" (ebd.) für die Lernenden erfahrbar werden lassen. Er legt einen eigenen Katalog fundamentaler Ideen vor:

- Idee der Zahl,
- Idee des Messens,
- Idee des räumlichen Strukturierens,
- Idee des funktionalen Zusammenhangs,
- Idee des Algorithmus,
- Idee des mathematischen Modellierens.

Die KMK-Standards (2004, 2005, 2015) schließen daran an und orientieren die Inhalte des Mathematikunterrichts an *allgemeinen Kompetenzen* und *Leitideen* oder *inhaltsbezogenen Kompetenzen*. Diese sind weitgehend identisch über den gesamten Mathematiklehrgang hinweg.

Primarstufe	Sekundarstufe I	Oberstufe
▸ Zahlen und Operationen ▸ Raum und Form ▸ Muster und Strukturen ▸ Größen und Messen ▸ Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit	▸ Zahl ▸ Messen ▸ Raum und Form ▸ Funktionaler Zusammenhang ▸ Daten und Zufall	▸ Algorithmus und Zahl ▸ Messen ▸ Raum und Form ▸ Funktionaler Zusammenhang ▸ Daten und Zufall

Abb. 1: Leitideen in den Bildungsstandards für die verschiedenen Schulstufen

Mit Blick auf die Schulrealität ist die entscheidende Frage, wie der Unterricht entlang fundamentaler Ideen, Prinzipien oder Leitlinien auszurichten ist. Lerninhalte lassen sich „intellektuell ehrlich" bereits früh im Unterricht verdeutlichen, wie etwa das Lösen von Gleichungen auf verschiedenen Niveaus, das Modellieren von Umweltsituationen oder das Arbeiten mit Funktionen. In den internationalen *PISA*-Studien *(Programme in Student Assessment)* werden derartige fundamentale Ideen unter dem Begriff *big ideas* zusammengefasst, worunter fachübergreifende mathematische Konzepte gesehen werden, z. B. „Veränderung und Wachstum", „Raum und Form" oder „quantitatives Denken" (Baumert u. a. 2001).

Im Folgenden soll an einem Begriff die spiralförmige Entwicklung über den gesamten Mathematikunterricht hinweg gezeigt werden (zu weiteren Beispielen vgl. z. B. Hefendehl-Hebeker 2004; Büchter 2014).

Beispiel: Der Kreis

Der Kreis ist ein Prototyp für einen geometrischen Begriff, der sich über das gesamte Mathematik-Curriculum hinweg nach dem Spiralprinzip entwickelt. Dabei lassen sich in allen Jahrgangsstufen immer wieder neue Eigenschaften dieses Begriffs entdecken und Zusammenhänge zu anderen Begriffen aufzeigen (vgl. Weigand 2011). Der Kreis ist einerseits als ein eigenständiges Objekt für sich interessant, es gibt andererseits aber auch viele Gemeinsamkeiten, Wechselbeziehungen und Analogien zu anderen Begriffen wie Strecke, Gerade, Dreieck, Viereck oder Kugel. Kreise sind Quellen für Problemstellungen auf allen Schulstufen und Schwierigkeitsebenen, sie sind ein Übungsfeld für das Begründen und Beweisen, und sie sind schließlich Grundlage ganzer mathematischer Gebiete, wie etwa der Trigonometrie. Darüber hinaus lassen sich mit diesem Begriff wichtige geometrische Sätze formulieren und vielfältige Beziehungen zu außermathematischen Bereichen herstellen (vgl. etwa Glaeser 2007). Das Verständnis dieses Begriffs hinsichtlich Begriffsinhalt und -umfang (Begriffsnetz) wird so sukzessive erweitert.

In der Primarstufe werden – aufbauend auf Umweltbeispielen – geometrische Grunderfahrungen zu diesem Begriff entwickelt. Der Kreis wird als geometrische Form in Abgrenzung etwa zu Dreieck und Viereck kennengelernt und bei Körperformen wie Zylinder, Kegel und Kugel räumlich erkannt. Die Eigenschaften des Kreises werden herausgearbeitet und ebene bzw. räumliche Begriffe thematisiert. Dabei lassen sich insbesondere Objekt-, Eigenschafts- und Relationsbegriffe unterscheiden (vgl. Franke & Reinhold 2016, 125 ff.).

Zu Beginn der Sekundarstufe I – ggf. auch früher – werden Kreise durch Umzeichnen kreisförmiger Gegenstände, dann mithilfe des Zirkels erzeugt, und es werden Symmetrieachsen – etwa durch Falten – erkannt. In vielfacher Weise lassen sich Umweltbezüge herstellen, etwa im Freizeit- und Sportbereich (Fußballfeld, Tennisballdosen, Lampen, Vasen …), in der Natur (Rasenflächen, Sonne und Mond als zweidimensionale Projektionen …), in der Technik (Räder bei Fahrzeugen, Zahnräder, Rotationswalzen …) oder bei der Darstellung statistischer Auswertungen in den Medien (etwa Wahlergebnisse oder Verteilung von Sitzen einzelner Parteien im Parlament in Kreisdiagrammen). Das führt dann zu einer Definition des Kreises als Menge aller (ebenen) Punkte mit festem Abstand zu einem gegebenen Punkt.

In der oberen Sekundarstufe I wird ein Kreis mit Radius r durch *Umfangs- und Flächenformel erfasst.*

Kreisumfang: $U(r) = 2\pi r$ *Flächeninhalt:* $A(r) = \pi r^2$

Damit treten insbesondere die Kreiszahl π und damit Problemstellungen auf, die Mathematiker Jahrtausende beschäftigt haben, wie etwa die Quadratur des Kreises, oder die auch heute noch herausfordernde Problemstellungen sind, wie etwa die Berechnung möglichst vieler Nachkommastellen der Dezimalbruchentwicklung von π.[1] Obige Kreisformeln lassen sich darüber hinaus auch als funktionale Zusammenhänge interpretieren und bilden Beispiele für proportionale und quadratische Funktionen. Weiterhin werden Kreise durch die Betrachtung von Umkreis und Inkreis eines Dreiecks in Beziehung zu Vielecken gesetzt, was – etwa im Zusammenhang mit der Frage nach Vierecken mit In- oder/und Umkreis – zu einer Klassifikation von Vierecken führen kann (vgl. Weigand 2011).

Dann tritt der Kreis im Rahmen von Konstruktionsaufgaben sowohl als Ausgangsobjekt für Probleme wie auch als Hilfsmittel für die Lösung von Problemen auf, etwa bei der Tangentenkonstruktion an einen Kreis. Es lassen sich zentrale Sätze der Geometrie erschließen, wie der Satz des Thales oder die Satzgruppe des Pythagoras. Und schließlich bildet der Kreis, am Ende der Sekundarstufe I, den Ausgangspunkt für ein neues mathematisches Gebiet, die Trigonometrie.

In der Sekundarstufe II lässt sich der Kreis algebraisch durch eine Gleichung beschreiben. Für alle Punkte auf dem Kreis mit Mittelpunkt (x_0, y_0) und dem Radius $r > 0$ gilt:

Kreis: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

Dabei wird auch die Beziehung zur Raumgeometrie deutlich, indem eine Erweiterung dieser Gleichung um eine dritte Koordinate unmittelbar zur Kugelgleichung führt.

Mithilfe der Differenzialrechnung lassen sich weitere Einblicke in die Beziehung zwischen Flächeninhalts- und Umfangsformel eines Kreises gewinnen:

1 Derzeit (2016) liegt der Rekord bei über 13 Billionen Nachkommastellen (http://3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592.eu/). Bei diesen Berechnungen liegt die Herausforderung nicht in dem Interesse, die Größe einer bestimmten Nachkommastelle zu kennen, sondern darin, effiziente Algorithmen zu finden, die auch mit hohen Nachkommastellen exakt rechnen. Aufgrund der bekannten Nachkommastellen können heute Algorithmen und Rechenprozessoren dahingehend überprüft werden, ob sie eine bestimmte Stelle der Kreiszahl richtig berechnen.

$A'(r) = U(r)$. Die Interpretation dieser Formeln ist eine gute Möglichkeit, Grundvorstellungen über den Ableitungsbegriff aufzubauen (vgl. etwa Greefrath u. a. 2016, S. 147 ff.).

2 Problemlösender Unterricht und Genetisches Prinzip

Geht man mit Carl Popper (1902–1994) davon aus, dass Leben Problemlösen ist, so ist damit bereits ein wesentlicher Grund für einen *problemlösenden Unterricht* angesprochen: Lebensvorbereitung erfordert einen Unterricht, in dem auf dem begrenzten und überschaubaren Übungsfeld – hier Mathematik – das Lösen von Problemen gelernt werden kann. Allerdings weiß man heute, dass sich der wünschenswerte Transfer der in einem Gebiet erlernten Fähigkeiten auf andere Bereiche nicht von selbst ereignet, sondern eigens erlernt werden muss. Wissen ist an den Kontext gebunden, in dem es erworben wurde, und Wissen steht zunächst auch nur bereichsspezifisch im Rahmen *Subjektiver Erfahrungsbereiche* (Bauersfeld 1983) zur Verfügung. Der Transfer auf andere Gebiete erfordert weiteres Wissen und zusätzliche Fähigkeiten.

Ein weiteres Argument für einen problemlösenden Unterricht ist der Aufbau eines Bildes von Mathematik, in dem Lernende mit mathematischen Begriffen einen Sinn verbinden. Begriffe dürfen nicht leere anschauungslose Objekte sein, sondern Lernende sollen sie als Antworten auf Fragen erkennen, als Lösungen von Problemstellungen, als Hilfsmittel für Problemlösungen und als Ausgangspunkt neuer Fragen und Problemstellungen (Vollrath 2001). Lernende sollen eine Vorstellung davon erhalten, warum Begriffe in der Wissenschaft Mathematik und deren Geschichte überhaupt gebildet worden sind. Dieses Suchen nach dem Ursprung und damit auch nach dem Sinn von Begriffen wird vielleicht am schönsten in dem mittlerweile berühmten Zitat von Otto Toeplitz (1881–1940) aus dem Vorwort zur „Entwicklung der Infinitesimalrechnung" ausgedrückt.

„Ich sagte mir: all diese Gegenstände der Infinitesimalrechnung … das bestimmte Integral, der Differentialquotient, … bei denen nirgends die Frage berührt wird: warum so? wie kommt man zu ihnen? alle diese Requisiten müssen doch einmal Objekte eines spannenden Suchens, einer aufregenden Handlung gewesen sein, nämlich damals als sie geschaffen wurden." (1949, V)

Ein Unterricht, der die Begriffsentwicklung im Rahmen der Genese mathematischer Begriffe problematisiert, wird als *historisch-genetischer Unterricht* bezeichnet. Es geht dabei aber nicht um die Geschichte der Mathematik an sich, sondern das Interesse gilt den Fragen und Problemen, die zu den Begriffen führten, es sind die Art und Weise der Lösungssuche, die Begriffe als Antworten auf Fragen erkennen lassen. Der Sinn von Begriffsbildungen konstituiert sich in der Auseinandersetzung mit Problemstellungen der Wissenschaft Mathematik. Das Einbeziehen von historischen Elementen ist aber nur eine Seite des *genetischen Prinzips*. Die andere Seite betont stärker das Anknüpfen an das Vorverständnis und die Erfahrungswelt der Schüler, das Berücksichtigen von Entwicklungs- und Verständnisstufen beim Schüler und das Entwickeln neuer Lerninhalte auf der Basis dieses Vorwissens, was insbesondere das Eingehen auf lernpsychologische Erkenntnisse erfordert.

Das zentrale Anliegen des *genetischen Prinzips* ist es, dass Mathematik nicht als ein Fertigprodukt gelernt wird, sondern dass Lernende einen Einblick in den *Prozess* der Entstehung von Mathematik erhalten (vgl. auch Selter 1997; Leuders et al. 2012). Mathematik ist etwas, bei dem Lernende entdecken oder erfinden können, auch wenn es sich meist oder fast ausschließlich nur um Nacherfindungen handelt.

Im Folgenden sind Beispiele aufgeführt, die eine besondere Berücksichtigung des genetischen Prinzips im Mathematikunterricht nahelegen.[2]

- Entwicklung von Rechengesetzen in der Primarstufe
- Bestimmung der Primzahlen mithilfe des Siebs des Eratosthenes
- Zerlegung von gewöhnlichen Brüchen in Stammbrüche
- Der Satz des Thales
- Der Satz des Pythagoras
- Die Bestimmung des Kugelvolumens nach Archimedes
- Der Zugang zur Differenzialrechnung mithilfe von Differenzenfolgen nach Leibniz
- Die Axiome von Kolmogorov in der Wahrscheinlichkeitsrechnung
- Der Übergang von der Binomial- zur Normalverteilung
- Die Integralrechnung und die Quadratur der Parabel nach Archimedes

3 Entdeckendes Lernen und Produktives Üben

Üben und Wiederholen sind notwendig zur Sicherung und Vertiefung des Gelernten und zur Entwicklung der Fähigkeit, das Gelernte in ähnlichen Situationen anwenden zu können. Üben kann in verschiedenen Formen erfolgen, wie etwa Verständnisübungen, stabilisierendes Üben, operatives Üben, anwendungsorientiertes Üben oder heuristisches Üben (vgl. Zech 1996, S. 208). Üben darf keine isolierte Tätigkeit sein, sondern muss in die Unterrichtskonzeption eingebunden und mit Einsicht verbunden sein. Üben muss ferner regelmäßig stattfinden („Prinzip der konsequenten Wiederholung") und sollte bereits gelernte Dinge immer wieder in neuen Kontexten aufgreifen („Prinzip der integrierten Wiederholung"). Damit ein Schema erlernt und verfügbar bleibt – es also ein stabiles Wissenselement wird –, muss es in herausfordernden und anregenden Kontexten immer wieder geübt werden („Prinzip der Stabilisierung").

2 Aufgrund der weitgehenden Bekanntheit dieser Beispiele wird auf eine ausführlichere Darstellung verzichtet. Weitere Hinweise finden sich in Didaktikbüchern Vollrath & Weigand (2006), Weigand (2009) und Greefrath et al. (2016), Tietze & Wolpers (2002), Wittmann (1981) sowie in verschiedenen Schulbuchkonzepten (vgl. Abschnitt 5).

In den letzten Jahrzehnten wurden wiederholt ein Abgehen von kleinschrittig konstruierten Aufgabenplantagen und ein Zuwenden zum Üben als einer sinnvermittelnden Tätigkeit gefordert (Wittmann 1990; Winter 1984). Die Begründung dafür liegt darin, dass stereotypes Üben nicht auf Fehlerursachen eingeht, dass dem Schüler keine konstruktiven Hilfen geboten werden und Verfestigung von Denkfehlern eintreten können. Einem kleinschrittigen Lernen und Üben setzen Wittmann und Müller im Rahmen des *aktiv-entdeckenden Lernen* das *produktive Üben* gegenüber, bei dem Lernabschnitte großzügiger bemessen sind, Aufgaben aus Sinnzusammenhängen entwickelt und den Lernenden Denkleistungen abverlangt werden, die die Eigenverantwortlichkeit für das Lernen fördern. Entdeckendes Lernen und produktives Üben sind in diesem Verständnis nicht voneinander getrennt zu sehen, sondern es wird „entdeckend geübt und übend entdeckt" (Winter 1984, S. 6f.). Sinnvolles Üben trägt zur Festigung des Gelernten bei und orientiert sich an dem, was später tatsächlich einmal gebraucht wird. Von produktivem Üben spricht Wittmann (1992, S. 177), „wenn ein Satz von Wissenselementen oder eine Fertigkeit anhand einer *größeren* Zahl *gleichartiger* Aufgaben geübt wird". Ziel muss es sein, Üben als integrierenden Bestandteil des Unterrichts zu sehen.

Im Zusammenhang mit Üben hat sich in letzter Zeit der Begriff der *Aufgabenkultur* eingebürgert. Insbesondere in dem BLK-Modellversuch *Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts* (1998; vgl. auch Demuth u. a. 2011) wurde der Weiterentwicklung der Aufgabenkultur eine bedeutende Rolle zugewiesen. Dabei geht es vor allem um Aufgaben – sogenannte „offene" Aufgaben – die mehrere Herangehensweisen und Lösungswege erlauben. Eine Möglichkeit, offene Aufgaben zu erhalten, ist es dabei „Aufgaben zu öffnen", was bedeutet, Aufgabenstellungen im Mathematikunterricht weiter zu fassen, um bspw. vielfältige mathematische Aktivitäten herauszufordern, um dadurch das integrierte Fördern inhaltlicher sowie prozessbezogener Kompetenzen zu unterstützen. Es gilt aber auch, Lernende zu öffnen für eine neue Sichtweise von Mathematik und schließlich Fragestellungen und Lösungswege zu öffnen, zu erweitern und zu verallgemeinern. Viele Beispiele für solche Aufgaben finden sich in der Rubrik „Die etwas andere Aufgabe" der Zeitschrift *mathematik lehren* in der Zusammenstellung von Aufgaben aus der Zeitung in Herget & Scholz (1998), in Schupp (2002) oder – zum Begriff der „Blütenaufgaben" – Bruder u. a. (2015). Für den Primarbereich ist in diesem Zusammenhang auch der Begriff der substanziellen Lernumgebungen oder substanziellen Aufgabenformate zu nennen (vgl. z. B. Wittmann 1995; Krauthausen & Scherer 2014).

Beispiel

Eine Zahlenkette besteht in der Basisvariante aus fünf nebeneinanderstehenden Zahlen, wobei mit Ausnahme der ersten beiden, frei zu wählenden Startzahlen eine Zahl jeweils die Summe der beiden vorherigen Zahlen darstellt. Die fünfte Zahl wird als Zielzahl bezeichnet. Also z. B.:

10	4	14	18	32

Dieses substanzielle Aufgabenformat kann in allen Klassenstufen der Grundschule, darüber hinaus auch in der Sekundarstufe I und sogar in der Lehrerbildung eingesetzt werden und bietet reichhaltige Möglichkeiten des produktiven Übens (vgl. z. B. Scherer & Selter 1996; Selter & Scherer 1996).

Eine mögliche Problemstellung wäre, beide Startzahlen so zu wählen, dass eine bestimmte Zielzahl, bspw. 100, erreicht wird bzw. alle Möglichkeiten für diese Zielzahl zu finden.

Ein grundschulgemäßer Zugang besteht im systematischen Probieren. Hat man eine Lösung nahe bei 100 gefunden, so lassen sich durch operatives Variieren weitere Zusammenhänge erkennen. Möglich wäre auch, ausgehend von der gesuchten Zielzahl, im Sinne des Rückwärtsarbeitens Folgerungen für die vorhergehenden Zahlen zu ziehen.

In der Sekundarstufe kann dieses Problem auch in algebraischer Form, u. a. mit einer Erhöhung der Anzahl der Kettenglieder, thematisiert werden (vgl. auch Selter & Scherer 1996):

a	b	a+b	a+2b	2a+3b	3a+5b	5a+8b	…	…

Als Zielzahl einer Kette der Länge *n* ergibt sich die Summe $F_{n-2} \cdot a + F_{n-1} \cdot b$, wobei F_{n-2} und F_{n-1} jeweils aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen sind. Weil diese stets teilerfremd sind, haben die entsprechenden Gleichungen für jede erdenkliche Zielzahl beliebig viele ganzzahlige Lösungen.

Weitere Übungsaktivitäten, die nicht nur inhaltsbezogene, sondern auch prozessbezogene Kompetenzen fördern und die u. a. auch das operative Prinzip umsetzen (vgl. Abschnitt 4), sind die Folgenden (vgl. Krauthausen & Scherer 2014):

- Was geschieht mit der Zielzahl, wenn man beide Startzahlen um 1, 2, 3 … erhöht bzw. vermindert?
- Was geschieht, wenn man die beiden Startzahlen vertauscht?
- Was geschieht, wenn beide Startzahlen gleich sind?
- Wie kann ich einen 1er, 2er, 3er- … Schritt erzeugen? Wie kann ich einen 0-Schritt erzeugen?

4 Das Operative Prinzip

Es war das zentrale Ziel der Überlegungen des Entwicklungspsychologen Jean Piaget (1896–1980), die Genese von Wissen in den Wissenschaften und beim Menschen zu erklären. Nach seiner genetischen Erkenntnistheorie entwickelt sich die Intelligenz etappen-, stufen- oder stadienweise in Wechselwirkung zwischen Mensch und Umwelt, wobei sich Denken in Form von flexiblen Systemen, Mustern oder „kognitiven Schemata" ausbildet, die die Aktivitäten des Einzelnen steuern.[3] Ausgangspunkt der kindlichen Denkentwicklung sind dabei zunächst an konkreten Objekten vorgenommene reale Handlungen, die durch an Bildern, Zeichen und Symbolen vorgenommene Handlungen erweitert werden, und die sich schließlich über einen Verinnerlichungsprozess als von konkreten Erfahrungen gelöste abstrakte oder formale Handlungen als die eigentlichen Denkoperationen ausbilden. Piaget führt Denken auf menschliche Handlungen zurück: Denken ist verinnerlichtes oder gedachtes Handeln. Kennzeichnend für diese verinnerlichten Handlungen oder – wie Piaget sie nennt – „Operationen" sind ihre Flexibilität oder Beweglichkeit, d. h. sie sind umkehrbar oder reversibel *(Reversibilität)*, zusammensetzbar oder kompositionsfähig *(Kompositionsfähigkeit)* sowie assoziativ *(Assoziativität)*, d. h. man kann auf verschiedenen Weisen zum Ziel kommen (vgl. Bauer 1993).

Während Piaget die stadienweise Entwicklung der menschlichen Intelligenz als weitgehend konstant und altersspezifisch ansieht, stellt Hans Aebli (1923–1990) – ein Schüler Piagets – stärker die Bedeutung der Erziehungsbedingungen und damit auch die Bedeutung von Unterricht für die Intelligenzentwicklung heraus. Für ihn vollzieht sich die Verinnerlichung einer Operation in drei Hauptstufen (Aebli 2001, S. 102): Ausgehend von der *konkreten Stufe* und dem Arbeiten mit konkreten Gegenständen und Material, wird auf der *figuralen Stufe* mit bildlich dargestellten Gegenständen operiert und auf der *symbolischen Stufe* werden Gegenstände und Operationen durch Zeichen repräsentiert. Entscheidend für den Stufenübergang ist dabei zum einen das *Reflektieren über die eigene Tätigkeit* oder die *Verbalisierung der Handlungen* und zum anderen das *operative Durcharbeiten oder Üben* der entsprechenden Inhalte. Darunter versteht er ein variables, sinnbezogenes Üben, das die Reversibilität, Kompositionsfähigkeit und Assoziativität zu entwickeln sucht. Mit dem *operativen Durcharbeiten* sind vielfältige systematische Veränderungen verbunden: Veränderung der Ausgangssituation, Suche nach alternativen Lösungswegen, Variieren der gesuchten Größen, Variation des Unwesentlichen, d. h. Variieren der Größen, die keinen Einfluss auf die betrachteten Zusammenhänge haben.

Entscheidend für die Denkentwicklung sind die an konkreten, bildlichen und symbolischen Gegenständen ausgeführten Aktivitäten und Handlungen. Der Wissenserwerb erfolgt nicht durch Betrachten oder einfaches Nachahmen („Mathematik ist kein Zuschauersport"), sondern das Operieren mit Objekten. *Konkretes Handeln, zeichnerisches Handeln* und *Handeln in der Vorstellung* sind die *Stufen des Verinnerlichungsprozesses*. Das operative Prinzip leitet einen Unterricht, „der das Denken im Rahmen des Handelns weckt, es als ein System von Operationen aufbaut, und es schließlich wieder in den Dienst des praktischen Handelns stellt" (Aebli 1985, S. 4). Dieses ist die Grundannahme des operativen Prinzips, das Aebli in die allgemeine Didaktik eingeführt hat.

3 Eine Einführung in die Erkenntnistheorie Piagets findet sich in Wittmann (1981, S. 59ff.).

Von den Stufen des Verinnerlichungsprozesses sind die *Darstellungsweisen* oder *Repräsentationsmodi* des Wissens und Könnens nach Jerome Bruner zu unterscheiden (vgl. auch Wittmann 1981, 87 ff.): die enaktive Form (Darstellung durch eine Handlung), die ikonische Form (Darstellung durch bildliche Mittel) und die symbolische Form (Darstellung durch Sprache und Zeichen). Man spricht auch vom EIS-Prinzip. Dabei handelt es sich nicht – im Unterschied zu den Stufen der Verinnerlichung nach Aebli – um nacheinander zu durchlaufende Stufen, sondern es sind vielmehr Darstellungsweisen, die wechselseitig aufeinander bezogen sind.

Wittmann (1985) hat das operative Prinzip der Mathematikdidaktik wie folgt formuliert: „*Objekte* erfassen bedeutet, zu erforschen, wie sie *konstruiert* sind und wie sie sich *verhalten*, wenn auf sie *Operationen* (Transformationen, Handlungen, …) ausgeübt werden. Daher muss man im Lern- oder Erkenntnisprozess in systematischer Weise

(1) untersuchen, welche Operationen ausführbar und wie sie miteinander verknüpft sind,

(2) herausfinden, welche *Eigenschaften* und *Beziehungen* den Objekten durch Konstruktion aufgeprägt werden,

(3) beobachten, welche *Wirkungen* Operationen auf *Eigenschaften* und *Beziehungen* der Objekte haben (Was geschieht mit …, wenn …?)" (ebd., S. 9; Hervorh. i. Orig.).

Beispiel

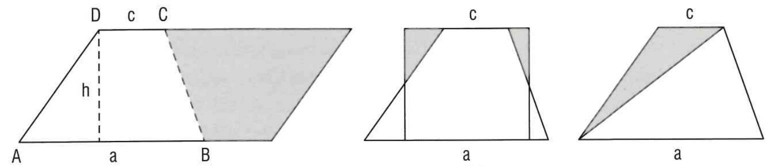
In der **Primarstufe** kommt das Operative Prinzip etwa beim Erlernen des *Einspluseins* oder des *Einmaleins* zur Anwendung, wenn sich Lernende neue Aufgaben aus bereits bekannten bzw. leichteren Aufgaben (Kernaufgaben) ableiten (vgl. Wittmann & Müller 1990; Krauthausen & Scherer 2007): Wenn etwa bei der Addition bestimmte Verdopplungsaufgaben oder bei der Multiplikation Aufgaben mit dem Faktor 5 bekannt sind, lassen sich die entsprechenden Nachbaraufgaben ableiten und an geeigneten Darstellungen veranschaulichen.

Aus $6+6=12$ ergibt sich $6+7=13$. Das Erhöhen eines Summanden um 1 liefert eine Erhöhung des Ergebnisses um 1.
Aus $5\cdot 7=35$ ergibt sich $6\cdot 7=42$. Das Erhöhen des Multiplikators um 1 liefert eine Erhöhung um den Wert des Multiplikanden, hier $1\cdot 7$.

Das Operative Prinzip kann auch im Rahmen substanzieller Lernumgebungen wie bei den unter Abschnitt 3 illustrierten „Zahlenketten" in vielfältiger Weise umgesetzt werden. So können operative Veränderungen der Startzahlen hinsichtlich ihrer Wirkung auf die Zielzahl oder auch die weiteren Zahlen einer Zahlenkette untersucht werden. Diese Erkenntnisse wären nicht nur als eigenständige Aufgabenstellung zu sehen, sondern können auch zur Problemlösung, etwa zum Erreichen einer bestimmten Zielzahl genutzt werden (vgl. Scherer &

Selter 1996; Selter & Scherer 1996; zu weiteren Aufgabenformaten z. B. Wittmann & Müller 1990; Krauthausen & Scherer 2014).

Beispiel Sekundarstufe I. Das Operative Prinzip bei der Berechnung des Flächeninhalts eines Trapezes[4]: Das Operative Prinzip zielt auf die Ausbildung flexibler oder beweglicher Denkweisen. Dies kann insbesondere durch das Betrachten und Analysieren einer Problemstellung aus verschiedenen Perspektiven erfolgen.



$$A_{ABCD} = \frac{(a+c)\cdot h}{2} \qquad A_{ABCD} = \frac{a+c}{2}h \qquad A_{ABCD} = \frac{a\cdot h}{2} + \frac{c\cdot h}{2}$$

Abb. 2: Verschiedene Zerlegungen eines Trapezes

So kann der Flächeninhalt des Trapezes ABCD hergeleitet werden, indem das Trapez auf verschiedene Weisen in andere – bekannte – flächengleiche Figuren zerlegt oder zu bekannten Figuren ergänzt wird und man sieht, dass es verschiedene Wege gibt zum – gleichen – Ziel zu gelangen. Weiterhin lassen sich Umkehraufgaben stellen: Welche Höhe ergibt sich bei einem Flächeninhalt von …? Wie ist der Zusammenhang zwischen a und c, wenn Höhe und Flächeninhalt eines Trapezes vorgegeben sind? (Zur Umsetzung vgl. Barzel et al. 2011.)

Dann kann auch die Leitfrage „Was geschieht, wenn …?" im Rahmen des Operativen Prinzips gestellt werden. Dabei lassen sich Auswirkungen einer Veränderung der Ausgangswerte – etwa der Seitenlängen oder der Höhe des Trapezes – auf den Flächeninhalt diskutieren. Darüber hinaus lassen sich auch Sonderfälle – etwa die Frage, was passiert, wenn die Seitenlänge c gegen 0 strebt – analysieren.

5 Das Prinzip der Selbsttätigkeit

Viele sogenannte schülerorientierte Arbeitsformen wie problemlösender, entdeckender, Projekt- oder offener Unterricht setzen Eigenaktivitäten oder Selbsttätigkeit des Lernenden voraus.[5] Dabei ist mittlerweile hinlänglich bekannt, dass es zu deren Umsetzung im Unterricht durchdacht geplanter Organisationsformen – man kann auch von „Unterrichtsmanagement" sprechen – bedarf, bei denen der Lehrkraft vielfältige Aufgaben wie Steuerung, situationsadäquate Hilfe und Unterstützung oder zusammenfassende Strukturierung zukommen. Mit einem auf Selbsttätigkeit aufbauenden Unterricht sind Ziele wie Entwicklung von Selbstständigkeit, kritisches Reflektieren der eigenen Tätigkeit und Motivation durch eigenen Erfolg verbunden. Insbesondere sollten Verständnisfehler produktiv genutzt werden, um Ursachen von Fehlerquellen aufzuspüren, um Beziehungen zu Vorkenntnissen herzustellen, und um durch das Aufzeigen von Konsequenzen aus fehlerhaften Überlegungen bewusst die Widersprüche zu mathematischen Gesetzmöglichkeiten deutlich werden zu lassen.

Nun war Selbsttätigkeit schon häufig eine zentrale Forderung bei Lern- und Bildungsprozessen. So fordert bereits Jean-Jacques Rousseau (1712–1778) Bildung durch „eigene Erfahrung" des Kindes, Johann Gottfried Herder (1744–1803) betont die Eigentätigkeit des Kindes bei Erziehung und Unterricht, Johann Gottlieb Fichte (1762–1814) sieht alles Denken und Erkennen als „Handeln" an und stellt deshalb die Selbsttätigkeit heraus, bei Johann Heinrich Pestalozzi (1746–1827) werden Anschauung und Selbsttätigkeit zu den beiden grundlegenden Prinzipien von Unterricht, und Friedrich Fröbel stellt die Selbsttätigkeit in den Mittelpunkt der Erziehung (vgl. Reble 1999). Dann bauen die Reformpädagogik und insbesondere die Arbeitsschulbewegung auf dem Prinzip der Selbsttätigkeit auf. So ist für John Dewey (1859–1952) das selbstständige Denken und Handeln Grundlage allen Lernens, für Georg Kerschensteiner hat das selbständige Erarbeiten zentrale Bedeutung für die Bildung des Menschen (Reble 1999, S. 293) und bei Hugo Gaudig (1860–1923) wird die Selbsttätigkeit zum zentralen Prinzip für alle Unterrichtsfächer.

„In dieser Arbeitsschule soll der Schüler während der gesamten Arbeitsvorgänge selbsttätig sein, selbsttätig beim Zielsetzen, selbsttätig beim Ordnen des Arbeitsganges, selbsttätig bei der Fortbewegung zum Ziel, selbsttätig bei den Entscheidungen an den Kreuzwegen, selbsttätig bei der Kontrolle, bei der Korrektur usw." (1911 auf dem Kongress für Jugendbildung und Jugendkunde, zit. nach Reble 1999, S. 298).

Für *Selbsttätigkeit im Mathematikunterricht* hat sich zu Beginn dieses Jahrhunderts vor allem Johannes Kühnel eingesetzt, indem er „Lernorganisation statt direkter Lernsteuerung" fordert.

Trotz dieser weit zurückreichenden Verankerung dieses Prinzips in der Geschichte der Pädagogik und Mathematikdidaktik, blieb die Bedeutung dieses Prinzips für den realen Mathematikunterricht gering. So stellt bereits Hugo Gau-

4 Die für Strecken verwendeten Variablen – hier a, b, c, h – werden für die Bezeichnungen als auch – im Hinblick auf eine übersichtliche Darstellung der Formeln – für die Längen der Strecken verwendet.

5 Ausgehend von einer konstruktivistischen Sichtweise, ist Selbsttätigkeit gar die notwendige Voraussetzung für jeglichen Wissenserwerb, da alle Sinneseindrücke letztlich mentale Konstruktionen sind. Gegenüber diesem weiten Begriffsverständnis wollen wir hier aber den Begriff enger eingrenzen.

dig im Jahre 1911 fest, dass zwar „Selbsttätigkeit" wohl das meistgebrauchte Schlagwort der damaligen Zeit war, dass aber „von den Taten, die dieses Wort fordert, ... nicht allzu viel in der deutschen Schule" zu spüren sei (Führer 1997, S. 219). Nun hängt die Beurteilung der Wirkung dieses Prinzips im Unterricht vor allem davon ab, was man unter dem Begriff *Selbsttätigkeit* versteht.

Heute gibt es für die Unterrichtspraxis viele konkrete Vorschläge für selbsttätiges Arbeiten im Mathematikunterricht: Etwa *Das Zahlenbuch* (Klett-Verlag) oder der *Zahlenzauber* (Oldenbourg-Verlag) für die Primarstufe, oder für die Sekundarstufen das Projekt *Kosima* (Kontexte für sinnstiftendes Mathematiklernen)[6] mit dem Schulwerk *mathewerkstatt*[7], das *Mathbuch*[8] oder *Neue Wege* (Schroedel-Verlag)[9].

Selbsttätigkeit – als didaktisches Prinzip – ist eine geplante zielorientierte Aktivität. Sie setzt ein anzustrebendes Ziel und Freiräume für das Denken und Handeln voraus, die das Planen, Ausführen und Kontrollieren von Aktivitäten betreffen. So ist etwa das systematische Variieren zum Erkunden von Zusammenhängen eine wichtige selbsttätige Lösungsstrategie. Dabei müssen aber auch mögliche Schwierigkeiten und Grenzen des Prinzips erkannt werden. Es ist nicht möglich, alle im Mathematikunterricht zu vermittelnden Inhalte, die sich im Laufe einer mehrtausendjährigen Geschichte angesammelt haben, selbstständig und selbsttätig zu erarbeiten. Dabei dürfen auch die Nachteile wie höherer Zeitaufwand, Verlust von Kontrolle im Unterricht und die spezifischen Anforderungen und mögliche Benachteiligung schwächerer Schülerinnen und Schüler nicht übersehen werden. Insgesamt ist Selbsttätigkeit stets im Hinblick auf die Zielvorgabe der Stunde oder des Unterrichts und die Einbettung in das – von der Lehrkraft geplante – Lernarrangement zu planen und zu beurteilen.

6 Abschließende Bemerkungen

Didaktische Prinzipien können leicht den Anschein eines veralteten Konzepts erwecken, wenn sie im Zusammenhang mit einem Unterricht gesehen werden, der von einer kleinschrittigen Planbarkeit und einem allzu eng ausgelegten Befolgen vorgegebener Regeln ausgeht. Didaktische Prinzipien müssen aber offen und jeweils situationsadäquat gesehen werden, sie können eine Orientierung für Lehrende darstellen, Unterricht bzw. Unterrichtsschritte zu planen, zu bewerten, zu diagnostizieren und zu analysieren. Es ist einerseits eine Stärke dieser Prinzipien, dass sie inhaltsunabhängig formuliert sind, andererseits können sie im Mathematikunterricht aber nur in Verbindung mit Inhalten angewandt werden.

6 www.ko-si-ma.de
7 www.cornelsen.de/mathewerkstatt-info
8 www.mathbu.ch
9 www.schroedel.de

Dies erfordert mathematisches, pädagogisches, psychologisches, – gelegentlich auch – historisches Wissen, es erfordert eine umfassende didaktische Bildung, um die Prinzipien zieladäquat einsetzen zu können. In gleicher Weise wie allgemeine Kompetenzen den Rahmen vorgeben, in dem sich Inhaltsziele entwickeln können, sind didaktische Prinzipien Leitlinien für eine inhaltliche zielgerichtete Unterrichtsgestaltung. Dabei gilt es stets, in Analogie zu den Kompetenzen oder Unterrichtszielen, neuere Entwicklungen – wie etwa den Einsatz digitaler Technologien – in die Ausgestaltung oder Anwendung dieser Prinzipien im realen Unterricht mit zu bedenken. So verstanden sind didaktische Prinzipien auch oder gerade heute eine wertvolle Hilfe für die Planung und Bewertung von Unterricht.

Literatur

Aebli, H. (1985). Das operative Prinzip. In: mathematik lehren, (11), 4–6.

Aebli, H. (2001). Zwölf Grundformen des Lehrens. 11. Auflage. Stuttgart: Klett.

Barzel, B., Büchter, A. & Leuders, T. (2011). Mathematik Methodik. Handbuch für die Sekundarstufe I und II. 6. Auflage. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Bauer, L. (1993). Das operative Prinzip als umfassendes, allgemeingültiges Prinzip für das Mathematiklernen. Didaktisch-methodische Überlegungen zum Mathematikunterricht in der Grundschule. In: ZDM, 25(2), 76–83.

Bauersfeld, H. (1983). Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In: H. Bauersfeld (Hrsg.), Lernen und Lehren von Mathematik, 1–56. Köln: Aulis.

Baumert, J. et al. (Hrsg.) (2001). PISA 2000: Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich. Opladen: Leske+Budrich.

BLK – Bund-Länder-Kommission (1998). Expertise „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts". Bonn: BLK. (http://www.blk-bonn.de/papers/heft60.pdf, letzter Zugriff: 23.04.2017)

Bruder, R., Linneweber-Lammerskitten, H. & Reibold, J. (2015). Individualisieren und differenzieren. In: R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), Handbuch der Mathematikdidaktik, 513–534. Berlin: Springer.

Bruner, J. S. (1970). Der Prozess der Erziehung. Berlin: Berlin Verlag.

Büchter, A. (2014). Das Spiralprinzip. Begegnen – Wiederaufgreifen – Vertiefen. In: mathematik lehren, (182), 2–9.

Demuth, R., Walther, G. & Prenzel, M. (Hrsg.) (2011). Unterricht entwickeln mit SINUS: 10 Module für den Mathematik- und Sachunterricht in der Grundschule. Seelze: Kallmeyer.

Franke, M. & Reinhold, S. (2016). Didaktik der Geometrie. In der Grundschule. 3. Auflage. Berlin: Springer Spektrum.

Führer, L. (1997). Pädagogik des Mathematikunterrichts. Eine Einführung in die Fachdidaktik für Sekundarstufen. Wiesbaden: Vieweg.

Glaeser, G. (2007). Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik. München: Spektrum Akademischer Verlag.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2016). Didaktik der Analysis – Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe. Berlin: Springer

Hefendehl-Hebeker, L. (2004). Beispiele zum Spiralprinzip. In: G. Krauthausen & P. Scherer (Hrsg.), Mit Kindern auf dem Weg zur Mathematik – Ein Arbeitsbuch zur Lehrerbildung. Festschrift für Hartmut Spiegel, 67–73. Donauwörth: Auer.

Heymann, H. W. (1996). Allgemeinbildung und Mathematik. Weinheim: Beltz.

KMK (Hrsg.) (2004). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. Beschluss vom 4.12.2003. München: Wolters Kluwer.

KMK (Hrsg.) (2005). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004. München: Wolters Kluwer.
KMK (Hrsg.) (2015). Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Beschluss der KMK vom 18.10.2012. Köln: Wolters Kluwer.
Krauthausen, G. & Scherer, P. (2007). Einführung in die Mathematikdidaktik. 3. neu bearbeitete Auflage. Heidelberg: Spektrum.
Krauthausen, G. & Scherer, P. (2014). Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht – Konzepte und Praxisbeispiele aus der Grundschule. Seelze: Kallmeyer.
Leuders, T., Prediger, S., Hußmann, S. & Barzel, B. (2012). Genetische Lernarrangements entwickeln – Vom Möglichen im Unmöglichen bei der Entwicklung der Mathewerkstatt. In: M. Ludwig & M. Kleine (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht, 541–544. Münster: WTM.
Reble, A. (1999). Geschichte der Pädagogik. 19. Auflage. Stuttgart: Klett.
Scherer, P. & Selter, C. (1996). Zahlenketten – ein Unterrichtsbeispiel für natürliche Differenzierung. In: Mathematische Unterrichtspraxis, 17(2), 21–28.
Schupp, H. (2002). Aufgabenvariation im Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker.
Selter, C. (1997). Genetischer Mathematikunterricht: Offenheit mit Konzept. In: mathematik lehren, (83), 4–8.
Selter, C. & Scherer, P. (1996). Zahlenketten – Ein Unterrichtsbeispiel für Grundschüler und Lehrerstudenten. In: mathematica didactica, 19(1), 54–66.
Tietze, U., Klika, M. & Wolpers, H. (Hrsg.) (2002). Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Bd. 3. Didaktik der Stochastik. Braunschweig: Vieweg.
Toeplitz, O. (1949). Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung. Berlin: Springer.
Vollrath, H.-J. (2001). Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe. Heidelberg/Berlin: Spektrum.
Vollrath, H.-J. & Weigand, H.-G. (2006). Algebra in der Sekundarstufe, Heidelberg/Berlin: Spektrum.
Weigand, H.-G. (2009). Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I. Heidelberg/Berlin: Spektrum.
Weigand, H.-G. (2011). Kreis und Kugel – Verbindung zwischen Ebene und Raum. In: mathematik lehren, (165), 2–7
Winter, H. (1984). Begriff und Bedeutung des Übens im Mathematikunterricht. In: mathematik lehren, 4(2), 4–16.
Winter, H. (1991). Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht: Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik. 2. Auflage. Braunschweig: Vieweg.
Wittmann, E. Ch. (1981). Grundfragen des Mathematikunterrichts. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.
Wittmann, E. Ch. (1985). Objekte – Operationen – Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik. In: mathematik lehren (11), 7–11.
Wittmann, E. Ch. (1992). Üben im Lernprozeß. In: E. Ch. Wittmann & G. N. Müller (Hrsg.), Handbuch produktiver Rechenübungen, Band 2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen, 175–182. Stuttgart: Klett.
Wittmann, E. Ch. (1995). Unterrichtsdesign und empirische Forschung. In: K. P. Müller (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht, 528–531. Hildesheim: Franzbecker.
Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (1990). Handbuch produktiver Rechenübungen. Bd. 1. Vom Einspluseins zum Einmaleins. Stuttgart: Klett.
Zech, F. (1996). Grundkurs Mathematikdidaktik. 8. Auflage. Weinheim/Basel: Beltz.

Marianne Grassmann & Gesa Ramm

Allgemeine mathematische Kompetenzen, Leitideen und Standards

Im vorliegenden Kapitel steht die Konzeption der Bildungsstandards im Mittelpunkt. Nachdem Ausgangspunkte und Wurzeln der Bildungsstandards in der jüngeren Geschichte kurz betrachtet werden, wird näher auf das Anliegen der Bildungsstandards eingegangen. Es wird herausgearbeitet, dass es nicht um eine Normierung von Lehr-Lernprozessen geht, sondern dass normative Erwartungen an zu vermittelnde Kompetenzen formuliert werden. Es werden die einzelnen Bestandteile – inhaltliche Leitideen und allgemeine mathematische Kompetenzen – charakterisiert, wobei die allgemeinen Kompetenzen Schwerpunkt sind. Die Anforderungen an den Primarbereich und an den Hauptschulabschluss bzw. Mittleren Schulabschluss werden aufgeführt und im Ergebnis eines Vergleichs deutlich gemacht, dass die Kompetenzentwicklung über den gesamten Mathematikunterricht vom ersten Schultag an zu betrachten ist, dass ein Denken in Schulformen nicht angebracht ist. Als letzter Baustein des Konzepts der Bildungsstandards werden die Anforderungsbereiche für Aufgaben dargestellt und alle drei Aspekte zu einem Gesamtmodell zusammengefasst. Abschließend wird kurz diskutiert, wie die Standards in der Schul- und Unterrichtsarbeit zu berücksichtigen sind und einige Kritikpunkte angedeutet.

1 Konzept der Bildungsstandards

Diskussionen um die Ziele des Mathematikunterrichts, die Frage, was ist mathematische Grund- bzw. Allgemeinbildung, sind nicht neu, werden seit den 1990er-Jahren bedingt durch Ergebnisse internationaler Vergleichsuntersuchungen aber verstärkt auch öffentlich geführt (vgl. Katja Eilerts & Hans-Dieter Rinkens in diesem Band S. 7 ff.). Köller verweist im Band 1 der Reihe *Basiswissen Lehrerbildung (Schule und Unterricht, Lehren und Lernen)* in diesem Zusammenhang auf beinahe panische Reaktionen auf veröffentlichte *TIMSS*-Befunde (vgl. Köller 2016, S. 189).

Ein Ergebnis dieser Diskussionen an der Schnittstelle zwischen Wissenschaft und Politik sind die ab 2004 veröffentlichten Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz (KMK 2003). Bevor ausführlicher auf Entstehung und Wurzeln eingegangen wird, muss festgehalten werden, dass es sich bei Bildungsstandards um normative Zielgrößen handelt, die zwischen Politik, Wissenschaft und Schulpraxis ausgehandelt werden. An ihre Einführung ist die Erwartung geknüpft,

Dr. Maike Abshagen
ist Studienleiterin für Mathematik an Gymnasien am Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein.

Prof. Dr. Bärbel Barzel
ist Professorin für Didaktik der Mathematik an der Universität Duisburg-Essen.

Prof. Dr. Jürg Kramer
ist Professor für Mathematik und ihre Didaktik an der Humboldt-Universität zu Berlin und Direktor des Deutschen Zentrums für Lehrerbildung Mathematik.

Dr. habil. Thomas Riecke-Baulecke
ist Direktor des Instituts für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein.

Prof. Dr. Bettina Rösken-Winter
ist Professorin für Design-Based Research an der Humboldt-Universität zu Berlin.

Prof. Dr. Christoph Selter
ist Professor für Didaktik der Mathematik mit dem Schwerpunkt Primarstufe an der TU Dortmund.

Mathematiklehrkräfte sind erfolgreicher, wenn sie über ein breites und gut miteinander vernetztes Wissen in der Mathematik, in der Didaktik und in den Bildungswissenschaften verfügen. Woraus aber besteht genau das Basiswissen, um Mathematikunterricht erfolgreich zu gestalten und Schülerinnen und Schüler möglichst optimal zu fördern und zu fordern?

Renommierte Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler stellen in kompakter und anschaulicher Weise didaktische Erkenntnisse und Theorien vor, die zum „State of the Art" des Mathematikunterrichts gehören. Der Band enthält Basiswissen zu folgenden drei Themenfeldern:

1. Lehren und Lernen von Mathematik: mathematische Bildung; mathematikdidaktische Prinzipien; allgemeine mathematische Kompetenzen, Leitideen und Standards.
2. Leitideen: Zahlen, Variable und Operationen; Messen; Raum und Form; funktionaler Zusammenhang; Daten und Zufall.
3. Unterrichtsqualität sichern und entwickeln: Unterrichtsqualität; Förderung und Diagnose im Mathematikunterricht; Differenzieren; digitale Medien im Unterricht; Unterrichtsentwicklung; Unterrichtsplanung.

Mathematik unterrichten
Abshagen • Barzel • Kramer • Riecke-Baulecke • Rösken-Winter • Selter (Hrsg.)
Klett Kallmeyer

Abshagen • Barzel • Kramer • Riecke-Baulecke • Rösken-Winter • Selter (Hrsg.)

BASISWISSEN LEHRERBILDUNG:

Mathematik unterrichten