Hinweis

Diese Datei darf nur an Ausrichtende dieser 2. Runde der Mathematik-Olympiade weitergeleitet werden. Aufgaben und Lösungen sind bis zu den Wettbewerbsterminen geheim zu halten. Wegen möglicher abweichender Termine an bestimmten Wettbewerbsorten ist bis zum offiziellen Freischaltungstermin auf der Internetseite des Mathematik-Olympiaden e.V. (Olympiadeklassen 3–4: 01.04., Olympiadeklassen 5–12: 01.12.) jeder Verbreitung außerhalb der eigenen Wettbewerbsdurchführung unbedingt entgegenzuwirken.

`http://www.mathematik-olympiaden.de`

Hinweis

Um der Vielfalt der Schulsysteme in den Bundesländern Rechnung zu tragen, aber auch die Mathematik-Olympiade bundesweit durchführen zu können, wurde der Begriff *Olympiadeklasse* geprägt. Die Aufgaben und Lösungen werden für die Olympiadeklassen 3 bis 12 angeboten.

Für die Bundesrunden gelten die folgenden Regeln zur Einstufung der Teilnehmer in die Olympiadeklassen 8 bis 12. Es wird empfohlen, diese Regeln in gleicher Weise für alle Olympiadeklassen der ersten 3 Runden anzuwenden.

- Für die Primarstufe und die Sekundarstufe 1 entspricht die Olympiadeklasse grundsätzlich dem laufenden Schuljahr.

- Für die Sekundarstufe 2 gibt es bundesweit unterschiedliche Bezeichnungen oder Nummerierungen der schulischen Jahrgangsstufen. In der Abiturstufe sind daher
  - die Olympiadeklasse 10 für die einjährige Einführungsphase und
  - die Olympiadeklassen 11 und 12 für die beiden Jahre der Qualifikationsphase

  vorgesehen.

- Die beiden Standard-Abläufe der Olympiadeklassen für die Primarstufe bis zum Abitur sind:
  - **G8**

laufendes Schuljahr	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
Jahrgangsstufe	3	4	5	6	7	8	9	10/E	Q	Q
Olympiadeklasse	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**

  - **G9**

laufendes Schuljahr	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
Jahrgangsstufe	3	4	5	6	7	8	9	10	E	Q	Q
Olympiadeklasse	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**10**	**11**	**12**

- **Wichtig: Doppelstart in Olympiadeklasse 10**
  Für eine optimal abgestimmte Vergleichbarkeit zwischen den beiden Abläufen starten Schülerinnen und Schüler aus G9 sowohl in ihrem Abschlussjahr der Sekundarstufe 1 als auch im Einführungsjahr der Sekundarstufe 2 in der Olympiadeklasse 10.

- **Wichtig: Klasse 13 startet in Olympiadeklasse 12**
  Daher starten Schülerinnen und Schüler aus G9 in ihrem Abiturjahr in der Olympiadeklasse 12.

Olympiadeklasse
5

61. Mathematik-Olympiade
2. Runde (Regionalrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

610521

Die vier Mädchen Martha, Nora, Olivia und Pia turnen gern auf dem Schulhof auf einem Turngerüst, das aus drei unterschiedlich hohen Reckstangen besteht.

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Mädchen, dass sich drei der vier Kinder auf die Reckstangen verteilen, während eines den anderen zusieht?

b) Nun möchten immer je zwei Mädchen so zusammen an einer Reckstange turnen, dass stets eine Reckstange frei bleibt.
Wie viele Möglichkeiten haben die Mädchen, sich in Zweiergruppen auf die Reckstangen zu verteilen?

610522

Über das Alter verschiedener Familienmitglieder ist Folgendes bekannt:

a) Emil wird in zwei Jahren doppelt so alt sein, wie er vor zwei Jahren war.
Ermittle das Alter von Emil.

b) Anne wird in drei Jahren dreimal so alt sein, wie sie vor drei Jahren war.
Ermittle das Alter von Anne.

c) Vater Martin ist 36 Jahre alt und damit genau dreimal so alt wie seine beiden Töchter zusammen.
In wie vielen Jahren wird der Vater nur noch zweimal so alt sein wie seine beiden Töchter zusammen?

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

610523

Herr Müller fährt auf der Autobahn $A\,24$ von Hamburg nach Berlin. Die Strecke ist 300 km lang.

Herr Müller fährt um 9 Uhr los und fährt sehr gleichmäßig. Er rechnet damit, um 12 Uhr in Berlin anzukommen.

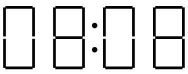
Leider ist die Strecke nach 100 km gesperrt, und der Verkehr wird über die Landstraße umgeleitet. Die Umleitungsstrecke ist 100 km lang, dann erreicht Herr Müller wieder die Autobahn. Das gesperrte Autobahnstück ist 50 km lang.

Auf der Landstraße kann Herr Müller nur halb so schnell fahren wie auf der Autobahn.

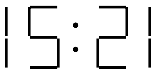
Wann kann Herr Müller nun damit rechnen, in Berlin anzukommen?

610524

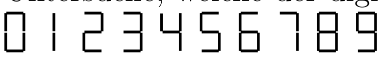
Maja betrachtet eine digitale Uhr um 08:08 und sieht auf der Anzeige das Bild:



Um 15:21 Uhr zeigt die Uhr folgendes Bild:



Maja bemerkt, dass die Stundenanzeige um 15:21 spiegelsymmetrisch zur Minutenanzeige ist (also symmetrisch zur senkrechten Achse durch den Doppelpunkt). Aber um 08:08 war das Bild nicht entsprechend spiegelsymmetrisch.

a) Untersuche, welche der digitalen Ziffern

nach Spiegelung an einer senkrechten Achse wieder eine digitale Ziffer ergeben.

b) Begründe, warum die Ziffer 8 nicht Teil einer spiegelsymmetrischen Uhrzeit sein kann.

c) Gib alle spiegelsymmetrischen Uhrzeiten an.

Olympiadeklasse 6

61. Mathematik-Olympiade
2. Runde (Regionalrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

610621

In dem Zahlenrätsel BLÜTE + BIENE = HONIG (siehe Abbildung) sollen die Buchstaben für die Ziffern 0 bis 9 stehen. Dabei gelten folgende Regeln:

$$\begin{array}{r} \text{B L Ü T E} \\ +\ \text{B I E N E} \\ \hline \text{H O N I G} \end{array}$$

(1) Am Anfang einer mehrstelligen Zahl darf nicht die Ziffer 0 stehen.
(2) Gleiche Buchstaben bedeuten auch gleiche Ziffern.
(3) Verschiedene Buchstaben bedeuten verschiedene Ziffern.

a) Gib 6 Ziffern an, die man für den Buchstaben B nicht einsetzen darf. Begründe.

b) Zeige, dass die Ziffern für BLÜTE und BIENE eindeutig festgelegt sind, wenn HONIG = 93782 gilt.

610622

Die vier Parallelklassen 6a, 6b, 6c und 6d führen ein Spieleturnier durch.

a) Jede Klasse spielt gegen jede andere Klasse genau zweimal. Wie viele Spiele werden durchgeführt?

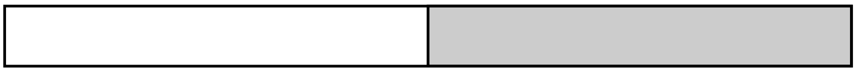
b) Wie viele verschiedene Verteilungen der Klassen auf die Plätze 1 bis 4 gibt es?

c) Die Turnhalle hat zwei Mädchen-Umkleideräume (M1 und M2) und zwei Jungen-Umkleideräume (J1 und J2). Es sollen sich die Mädchen aus je zwei Parallelklassen einen Umkleideraum teilen, und ebenso teilen sich die Jungen aus je zwei Parallelklassen einen Umkleideraum.
Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die Mädchen und die Jungen der vier Klassen auf die zwei Mädchen- und die zwei Jungen-Umkleideräume zu verteilen?

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

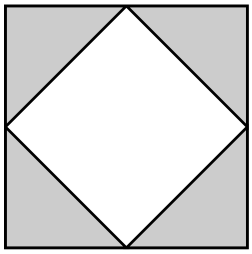
610623

a) Florian hat einen 5 cm breiten Papierstreifen (siehe die nicht maßstabsgerechte Abbildung). Er schneidet diesen in der Mitte durch und behält einen halb so langen, immer noch 5 cm breiten Papierstreifen übrig. Die andere Hälfte wirft er weg.



Florian wiederholt diesen Vorgang noch vier Mal. Am Ende hat er einen Papierstreifen mit dem Flächeninhalt von $20\,\mathrm{cm}^2$ übrig.
Wie viele cm^2 Flächeninhalt hatte der Papierstreifen am Anfang und wie lang war er?

b) Anna hat ein quadratisches Stück Papier. Sie verbindet so die Mittelpunkte der vier Quadratseiten, dass wieder ein Quadrat entsteht. Dann schneidet Anna die entstandenen Ecken ab (siehe die nicht maßstabsgerechte Abbildung). Diesen Vorgang wiederholt Anna noch drei Mal. Am Ende hat Anna ein Quadrat mit dem Flächeninhalt von $4\,\mathrm{cm}^2$ übrig.
Wie viele cm^2 Flächeninhalt hatte ihr Quadrat am Anfang und wie groß war die Seitenlänge des Anfangsquadrates?



610624

Gesucht sind natürliche Zahlen, die folgende drei Bedingungen erfüllen:

(1) Die Zahl enthält nur die Ziffern 2 und 3.
(2) Die Summe aller Ziffern der Zahl ist 15.
(3) Die Zahl ist durch 6 teilbar.

a) Ermittle die kleinste dieser Zahlen.
b) Ermittle die größte dieser Zahlen.
c) Ermittle die Anzahl aller Zahlen, die diese drei Bedingungen erfüllen.

61. Mathematik-Olympiade
2. Runde (Regionalrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

610721

Eine alte Wanduhr hat einen Stunden-, einen Minuten- und einen Sekundenzeiger, welche sich immer noch präzise gleichmäßig drehen. Für eine Umdrehung benötigt der Stundenzeiger genau 12 Stunden, der Minutenzeiger genau eine Stunde und der Sekundenzeiger genau eine Minute.

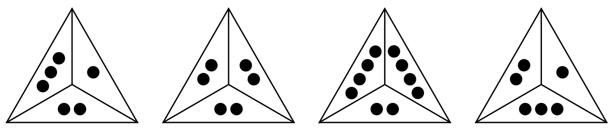
a) Wie lange benötigt jeder der drei Zeiger für 100 Umdrehungen?

   Gib diese Zeiten für den Stunden- und den Minutenzeiger in Tagen und für den Sekundenzeiger in Stunden mit gegebenenfalls gebrochenen Anteilen an.

b) Wie oft überholt der Minutenzeiger den Stundenzeiger an einem Tag in der Zeit von 11 Uhr bis 23 Uhr?

c) Ermittle die Größe des spitzen Winkels, den der Minuten- und der Stundenzeiger um 16:20 Uhr einschließen.

610722



Jan hat ein Spiel mit Trimino-Steinen geschenkt bekommen. Alle Trimino-Steine sind gleich groß und haben von oben betrachtet die Form eines gleichseitigen Dreiecks. Diese Dreiecke sind durch die Strecken von den Eckpunkten zum Mittelpunkt des Dreiecks jeweils in drei Felder geteilt. Jedes dieser Felder ist mit ein bis vier Augen bedruckt. Die Unterseiten der Steine sind unbedruckt. Als Beispiele sind vier Trimino-Steine mit Blick von oben abgebildet.

Zwei Trimino-Steine gelten als gleich, wenn man sie so mit der bedrucken Seite nach oben übereinanderlegen kann, dass jeweils die übereinanderliegenden Felder mit der gleichen Augenzahl bedruckt sind. Das Spiel enthält keine zwei gleichen Trimino-Steine, aber sonst alle Trimino-Steine der oben beschriebenen Art.

a) Untersuche, ob der erste und der vierte abgebildete Stein als gleich gelten.

b) Bestimme die Anzahl aller Trimino-Steine in diesem Spiel, bei denen alle drei Felder des jeweiligen Spielsteins mit der gleichen Augenzahl bedruckt sind.

c) Bestimme die Anzahl aller Trimino-Steine in diesem Spiel, bei denen genau zwei Felder des jeweiligen Spielsteins mit der gleichen Augenzahl bedruckt sind.

d) Bestimme die Anzahl aller Trimino-Steine in diesem Spiel.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

<u>610723</u>

In einem Rechteck $ABCD$ sei P ein Punkt der Diagonalen $\overline{AC}$, der von A und C verschieden ist. Die Parallele zur Geraden AD durch den Punkt P schneide die Seite $\overline{AB}$ im Punkt E und die Seite $\overline{CD}$ im Punkt G. Die Parallele zur Geraden AB durch den Punkt P schneide die Seite $\overline{BC}$ im Punkt F und die Seite $\overline{AD}$ im Punkt H.

a) Berechne die Flächeninhalte der Rechtecke $BFPE$ und $DHPG$ für den Fall, dass die Strecke $\overline{AB}$ die Länge $9\,\text{cm}$ hat, die Strecke $\overline{AD}$ die Länge $6\,\text{cm}$ hat, die Strecke $\overline{AE}$ die Länge $3\,\text{cm}$ hat und die Strecke $\overline{BF}$ die Länge $2\,\text{cm}$ hat.

b) Beweise: Für jedes Rechteck $ABCD$ und jeden inneren Punkt P der Diagonalen $\overline{AC}$ sind die Rechtecke $BFPE$ und $DHPG$ flächeninhaltsgleich.

<u>610724</u>

Tim hat zum Geburtstag eine Tafel Schokolade bekommen. Er will sie nicht sofort aufessen, sondern jeden Tag nur genau ein Teilstück, welches er von der Tafel bzw. der Resttafel jeweils an nur einer der vorgefertigten Bruchlinien abbricht. Wenn die Resttafel keine vorgefertigten Bruchlinien hat, isst er sie ganz auf.

a) Tims Schokoladentafel hat das Format 4×4, ist also eine Tafel, deren Länge 4 Stücke und deren Breite 4 Stücke ausmacht.

   Ermittle die größtmögliche Anzahl an Tagen, an denen Tim jeweils ein Stück seiner Schokoladentafel essen kann.

b) Tim denkt über eine Verallgemeinerung seines Problems nach. Die Schokoladentafel möge das Format $L\times B$ haben, also eine Tafel sein, deren Länge L Stücke und deren Breite B Stücke ausmacht, wobei L und B natürliche Zahlen größer als 0 sind.

   Ermittle in Abhängigkeit von L und B die größtmögliche Anzahl an Tagen, an denen Tim nun jeweils ein Stück seiner Schokoladentafel essen kann.

Olympiadeklasse **8**

61. Mathematik-Olympiade
2. Runde (Regionalrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

610821

Amelie erhielt bisher in Geografie in den beiden schriftlichen Tests die Noten 1 und 3 und als mündliche Noten zwei Zweien und eine Eins. In Mathematik hat sie in den Klassenarbeiten die Noten 1, 3, 1 und 2 erhalten und in den sonstigen Leistungen die Noten 1, 2, 1, 1 und 1. Sie möchte in Geografie und Mathematik durch genügend viele Einsen erreichen, dass ihr Notendurchschnitt jeweils besser als 1,5 ist.

a) In Geografie wird der Notendurchschnitt als arithmetisches Mittel aller Noten berechnet.

   Ermittle, wie viele Einsen Amelie mindestens noch benötigt, um einen Notendurchschnitt besser als 1,5 zu erreichen, wenn sie nur noch Einsen bekommen würde.

b) In Mathematik wird der Notendurchschnitt als Summe von 60 % des arithmetischen Mittels der Noten der Klassenarbeiten und von 40 % des arithmetischen Mittels der Noten der sonstigen Leistungen berechnet.

   Ermittle, wie viele Einsen Amelie in den sonstigen Leistungen mindestens noch benötigt, um einen Notendurchschnitt besser als 1,5 zu erreichen, wenn sie nur noch Einsen bekommen würde.

610822

Eine Zahl heißt Palindromzahl, wenn sie vorwärts gelesen dieselbe Ziffernfolge hat wie rückwärts gelesen, wie zum Beispiel 737 und 24842.

a) Ermittle die Anzahl aller dreistelligen Palindromzahlen.

b) Ermittle die Anzahl aller fünfstelligen Palindromzahlen.

c) Ermittle alle fünfstelligen Palindromzahlen der Form $ABCBA$ mit Ziffern A, B und C, die folgende Eigenschaften haben:

   (1) Keine zwei der Ziffern A, B und C der Palindromzahl sind gleich.

   (2) Die Palindromzahl ist durch 6 teilbar.

   (3) Die Ziffer B ist doppelt so groß wie die Ziffer A.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

610823

a) Zeichne ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge 5 cm, die Diagonale $\overline{AC}$ und deren Mittelpunkt M. Wähle auf der Strecke $\overline{CM}$ einen Punkt P verschieden von den Punkten C und M. Verbinde den Punkt P mit dem Punkt B durch eine Strecke und zeichne dann die Senkrechte zur Geraden BP durch den Punkt P. Benenne den Schnittpunkt dieser Senkrechten und der Strecke $\overline{AD}$ mit Q.

b) Miss im Dreieck BPQ die Längen der Strecken $\overline{BP}$ und $\overline{PQ}$. Vergleiche die beiden Längen und stelle eine Vermutung in Bezug auf diese Streckenlängen auf.

c) Beweise deine Vermutung.

Hinweis: Es darf ohne weitere Begründung verwendet werden, dass der Punkt Q auf der Quadratseite $\overline{AD}$ liegt und von den Punkten A und D verschieden ist.

610824

Der Bruch $\frac{59}{221}$ soll als Differenz zweier positiver echter Brüche dargestellt werden, wobei ein Nenner 13 und der andere Nenner 17 ist.

Ermittle alle Paare von Brüchen, welche diese Bedingungen erfüllen.

Hinweis: Der Bruch $\frac{p}{q}$ ist ein positiver echter Bruch, wenn p und q positive ganze Zahlen sind und p kleiner als q ist.

Olympiadeklasse

9

61. Mathematik-Olympiade
2. Runde (Regionalrunde)
Aufgaben

<u>Hinweis:</u> *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

<u>610921</u>

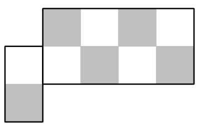
Niklas fährt jeden Tag mit dem Fahrrad zur Arbeit, und zwar immer denselben Weg und immer mit derselben konstanten Geschwindigkeit – außer letzten Dienstag, da war es anders. Da ist er die erste Hälfte seines üblichen Weges doppelt so schnell gefahren wie sonst, die letzten 3 km ist er halb so schnell gefahren wie sonst, und nur dazwischen ist er genau so schnell gefahren wie sonst. Amüsiert stellt er fest, dass er genau die gleiche Fahrzeit gebraucht hat wie sonst auch.

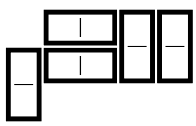
Wie lang ist sein Arbeitsweg? Weisen Sie nach, dass sich die Antwort auf diese Frage eindeutig ermitteln lässt.

<u>610922</u>

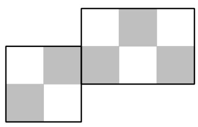
Max bastelt durch Zusammenkleben von Teilen alter Schachbretter neue Figuren. Die Aufgabe ist nun, diese Figuren mit Dominosteinen lückenlos und überschneidungsfrei auszulegen. Dabei überdeckt jeder Dominostein genau zwei der Schachbrettfelder.

a) Die Abbildung A 610922 b zeigt eine mögliche Anordnung von Dominosteinen, bei der die Figur in Abbildung A 610922 a ausgelegt wird. Geben Sie alle anderen vier Möglichkeiten an, dieselbe Figur zu legen. Ein Nachweis, dass dies alle Möglichkeiten sind, wird nicht verlangt.


A 610922 a

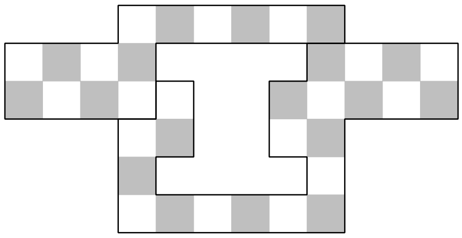

A 610922 b

b) Geben Sie alle sechs Möglichkeiten an, die Figur in Abbildung A 610922 c mit Dominosteinen auszulegen. Begründen Sie, dass es keine weiteren Möglichkeiten für das Auslegen der Figur geben kann.


A 610922 c

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

c) Bestimmen Sie (mit Nachweis) die Anzahl der Möglichkeiten, die Figur in Abbildung A 610922 d mit Dominosteinen auszulegen. Die Aussagen aus (a) und (b) dürfen Sie hierbei ohne Nachweis verwenden.



A 610922 d

610923

Ermittle alle Paare von zweistelligen Primzahlen (p, q) mit folgenden Eigenschaften.

(1) Es gilt $p < q$.

(2) Auch $p - 6$ und $p + 6$ sind zweistellige Primzahlen.

(3) p und q besitzen die gleiche Einerstelle.

(4) Die Quersumme des Produktes $p \cdot q$ ist gleich p.

610924

Für das Dreieck ABC gelte: Die Seite $\overline{AC}$ ist doppelt so lang wie die Seite $\overline{BC}$, und es sei $|\sphericalangle ACB| = 120°$. Die Halbierende dieses Winkels schneide die Gerade AB im Punkt D.

Zeigen Sie, dass dann $|CD| = \frac{2}{3}\,|BC|$ gilt.

Olympiadeklasse **10**

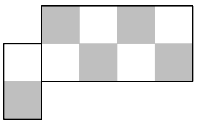
61. Mathematik-Olympiade
2. Runde (Regionalrunde)
Aufgaben

<u>Hinweis:</u> *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

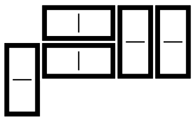
<u>611021</u>

Max bastelt durch Zusammenkleben von Teilen alter Schachbretter neue Figuren. Die Aufgabe ist nun, diese Figuren mit Dominosteinen lückenlos und überschneidungsfrei auszulegen. Dabei überdeckt jeder Dominostein genau zwei der Schachbrettfelder.

a) Die Abbildung A 611021 b zeigt eine mögliche Anordnung von Dominosteinen, bei der die Figur in Abbildung A 611021 a ausgelegt wird. Geben Sie alle anderen vier Möglichkeiten an, diese Figur auszulegen. Ein Nachweis, dass dies alle Möglichkeiten sind, wird nicht verlangt.

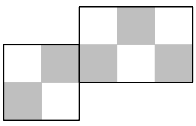


A 611021 a



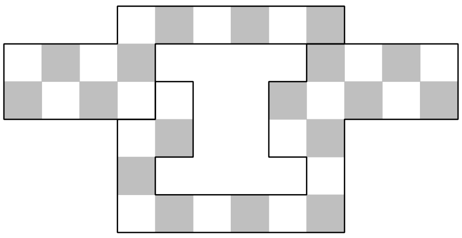
A 611021 b

b) Geben Sie alle sechs Möglichkeiten an, die Figur in Abbildung A 611021 c mit Dominosteinen auszulegen. Begründen Sie, dass es keine weiteren Möglichkeiten für das Auslegen der Figur geben kann.



A 611021 c

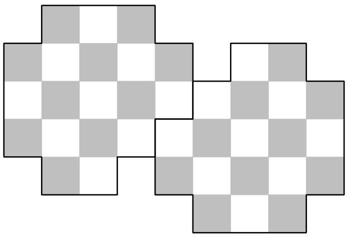
c) Bestimmen Sie (mit Nachweis) die Anzahl der Möglichkeiten, die Figur in Abbildung A 611021 d mit Dominosteinen auszulegen. Die Aussagen aus (a) und (b) dürfen Sie hierbei ohne Nachweis verwenden.



A 611021 d

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

d) Beweisen Sie, dass es nicht möglich ist, die Figur in Abbildung A 611021 c mit Dominosteinen auszulegen.



A 611021 e

611022

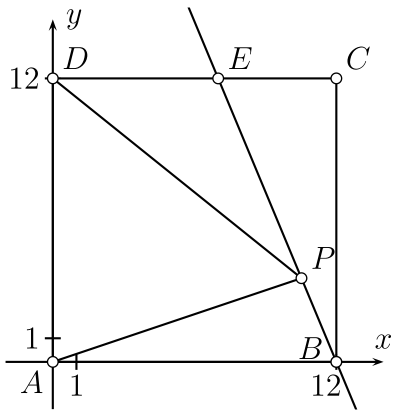
Ermitteln Sie alle Paare von zweistelligen Primzahlen (p, q) mit den folgenden Eigenschaften:

(1) p und q besitzen die gleiche Einerstelle.

(2) Die Quersumme des Produktes $p \cdot q$ ist gleich p.

611023

In einem Koordinatensystem befindet sich ein Quadrat mit den Eckpunkten $A(0, 0)$, $B(12, 0)$, $C(12, 12)$ und $D(0, 12)$. Eine Gerade durch B schneidet die Strecke $\overline{CD}$ in dem Punkt $E(7, 12)$. Auf der Strecke $\overline{BE}$ befindet sich ein Punkt P.



A 611023

a) Weisen Sie nach, dass sich die Gerade BE durch die Gleichung

$$y = -\frac{12}{5}x + \frac{144}{5}$$

beschreiben lässt.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks APD, wenn das Dreieck DPE den Flächeninhalt 28 besitzt.

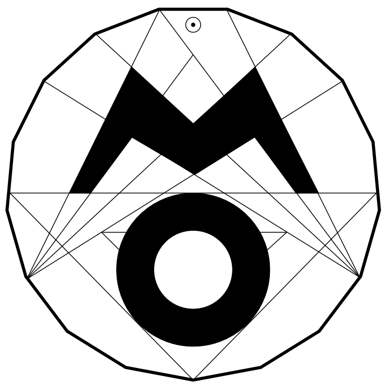
c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks APD, wenn das Dreieck DPE gleichschenklig ist.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

611024

Bestimmen Sie alle ganzen Zahlen n, für welche reelle Zahlen x, y derart existieren, dass die folgenden Gleichungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} x + y &= n, \\ x^3 + y^3 &= n^2. \end{aligned}$$



Olympiadeklassen **11–12**

61. Mathematik-Olympiade
2. Runde (Regionalrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

611221

Es seien x und y natürliche Zahlen, die beide in dezimaler Darstellung $x = \overline{ab}$ und $y = \overline{ac}$ zweistellig sind. Dabei seien a, b und c drei nicht notwendig paarweise voneinander verschiedene Ziffern. Weiterhin sei bekannt, dass die folgenden drei Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt sind.

(1) $a + b = c$.

(2) Die Summe $x + y$ ist durch 10 teilbar.

(3) Die Quersumme des Produkts xy hat den Wert 5.

Man ermittle, ob durch diese Angaben die Zahlen x und y eindeutig bestimmt sind. Ist dies der Fall, so berechne man das Produkt xy.

611222

In einem Kerzenständer stehen n Kerzen. Man möchte an n aufeinanderfolgenden Wochenenden jeweils einige der Kerzen anzünden. Am ersten Wochenende soll dabei genau eine Kerze angezündet werden, am zweiten Wochenende genau zwei Kerzen usw., bis schließlich am n-ten Wochenende alle n Kerzen angezündet werden. Keine Kerze soll an einem Wochenende mehrfach angezündet werden.

Man untersuche, für welche positiven ganzen Zahlen n es möglich ist, dies in einer solchen Weise zu tun, dass jede der n Kerzen gleich oft angezündet wird.

Man beweise, dass es genau für diese Zahlen möglich ist.

611223

Gegeben ist ein Rhombus (andere Bezeichnung: Raute) $ABCD$, bei dem das Produkt der Längen der Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ gleich dem Quadrat der Seitenlänge $\overline{AB}$ ist.

Man bestimme das Verhältnis der Größen zweier benachbarter Innenwinkel des Rhombus.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

611224

Man beweise für alle reellen Zahlen a und b mit $a > b \geq 0$ die Ungleichung

$$3a + \frac{4}{(a-b)^3} \geq 4\sqrt{2}$$

und untersuche, für welche a und b Gleichheit eintritt.

61. Mathematik-Olympiade
2. Runde (Regionalrunde)
Lösungen

610521 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Wenn Martha sich zuerst aussucht, ob sie die hohe, die mittlere, die niedrige oder keine Reckstange wählt, hat sie vier Möglichkeiten. Für jede Auswahl, die Martha getroffen hat, bleiben für Nora dann noch drei Möglichkeiten zur Auswahl übrig und danach für Olivia noch zwei Möglichkeiten, und Pia hat keine Wahl mehr. Insgesamt haben die Mädchen folglich $(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =)\, 24$ Möglichkeiten, sich auf die drei Reckstangen und den Zuschauerplatz zu verteilen.

Lösungsvariante: Eine Möglichkeit zur Lösungsfindung ist auch das systematische Erfassen aller Möglichkeiten.

Teil b) Die vier Mädchen bilden zwei Zweiergruppen, die Gruppe 1 und Gruppe 2. Die Gruppe 1 hat drei Reckstangen zur Wahl, und danach bleibt für die Gruppe 2 noch die Wahl zwischen zwei Reckstangen. Folglich können sich die beiden Gruppen auf $(3 \cdot 2 =)\, 6$ verschiedene Arten auf die Stangen verteilen.

Es muss noch untersucht werden, wie viele Möglichkeiten die Mädchen haben, sich in Zweiergruppen aufzuteilen. Die Gruppe 1 sei diejenige Gruppe, in der Martha ist. Dann kann sie in dieser Gruppe zusammen sein mit Nora, mit Olivia oder Pia. Je nach Auswahl für diese erste Gruppe bleiben für die zweite Gruppe die anderen beiden Mädchen übrig. Es gibt also drei verschiedene Möglichkeiten für die Mädchen, sich in Zweiergruppen aufzuteilen.

Da für jede der drei Aufteilungen in Zweiergruppen je 6 Verteilungen auf die Reckstangen möglich sind, haben die Mädchen insgesamt $(3 \cdot 6 =)\, 18$ verschiedene Möglichkeiten, sich in Zweiergruppen auf die drei Reckstangen zu verteilen.

Lösungsvariante: Auch hier lassen sich alle Möglichkeiten systematisch erfassen.

610522 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Sei e das Alter von Emil. Dann gilt $e + 2 = 2 \cdot (e - 2)$. Wenn man mit dieser Gleichung rechnet (oder probiert), erhält man: Emil ist sechs Jahre alt. Hier wird die Rechnung folgendermaßen durchgeführt:

$e + 2 = 2e - 4, \quad 2 = e - 4, \quad e = 6.$

Lösungsvariante: Emil wird in zwei Jahren vier Jahre älter sein als er vor zwei Jahren war. Er ist dann auch doppelt so alt wie vor zwei Jahren. Folglich war Emil vor zwei Jahren vier Jahre alt und ist heute sechs Jahre alt.

Teil b) Sei a das Alter von Anne. Dann gilt die Gleichung $a + 3 = 3 \cdot (a - 3)$. Auch hier erhält man wieder mit Rechnen oder Probieren: Anne ist sechs Jahre alt. Hier wird die Rechnung folgendermaßen durchgeführt:

$a + 3 = 3a - 9, \quad 3 = 2a - 9, \quad 12 = 2a, \quad a = 6.$

Lösungsvariante: Der Unterschied zwischen den beiden betrachteten Jahren beträgt 6 Jahre. Diese 6 Jahre Unterschied müssen das Doppelte des Alters von Anne vor drei Jahren sein. Deshalb muss Anne vor drei Jahren 3 Jahre alt gewesen und jetzt 6 Jahre alt sein.

Teil c) Die beiden Töchter sind zusammen 12 Jahre alt, denn das ist ein Drittel von 36. In jedem Jahr nimmt das zusammengerechnete Alter der Töchter um zwei Jahre zu, das des Vaters nur um ein Jahr. Jetzt kann man systematisch probieren und erhält: In vier Jahren, wenn Vater Martin 40 Jahre alt sein wird, sind die beiden Töchter zusammen $(12+4+4=)\,20$ Jahre alt, und folglich wird Vater Martin in vier Jahren doppelt so alt sein wie seine Töchter zusammen.

Lösungsvariante: Sei x die gesuchte Anzahl von Jahren. Dann gilt $36 + x = 2(12 + 2x)$, also

$36 + x = 24 + 4x, \quad 36 = 24 + 3x, \quad 12 = 3x, \quad x = 4.$

610523 Lösung *10 Punkte*

Wir folgen Herrn Müller Stück für Stück.

Da er ursprünglich annahm, für die 300 km genau drei Stunden zu benötigen, ist seine Geschwindigkeit auf der Autobahn also 100 km/h.

Für die ersten 100 km bis zur Sperrung braucht er eine Stunde, er erreicht den Beginn der Umleitung also um 10 Uhr.

Auf der Landstraße kann Herr Müller nur mit $(100\,\mathrm{km/h} : 2 =)\,50\,\mathrm{km/h}$ fahren, also benötigt er für die 100 km Umleitungsstrecke $(100 : 50 =)\,2$ Stunden. Er erreicht folglich die Autobahn wieder um 12 Uhr.

Die Autobahnstrecke, die noch vor ihm liegt, ist $(300\,\mathrm{km} - 100\,\mathrm{km} - 50\,\mathrm{km} =)\,150\,\mathrm{km}$ lang, und da er wieder mit 100 km/h fährt, benötigt er hierfür $1,5$ Stunden.

Folglich kann Herr Müller damit rechnen, um 13:30 Uhr in Berlin anzukommen.

610524 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Nach Spiegelung an einer senkrechten Achse ist die Null wieder eine Null, die Eins wieder eine Eins, die Zwei eine Fünf, die Fünf eine Zwei und die Acht wieder eine Acht. Folglich sind die digitalen Ziffern 0, 1, 2, 5 und 8 nach Spiegelung auch wieder digitale Ziffern.

Teil b) Die Acht kann nicht an der Einerstelle der Minutenanzeige stehen, weil sie dann auch an der Zehnerstelle der Stundenanzeige stehen müsste. Dort kann aber nur 0, 1 oder 2 stehen, weil die Uhrzeit nur bis 24 Stunden gezählt wird.

Die Acht kann auch nicht an der Zehnerstelle der Minutenanzeige stehen, weil die Minutenanzeige höchstens 59 anzeigt.

Da die Acht also nicht an der Einerstelle und nicht an der Zehnerstelle der Minutenanzeige stehen kann, kann sie nicht Teil einer spiegelsymmetrischen Uhrzeit sein.

Teil c) Hier sind alle Uhrzeiten gesucht, die ausschließlich aus den Ziffern 0, 1, 2 oder 5 bestehen. Wenn alle möglichen Stundenanzeigen systematisch erfasst werden, ergibt sich die Minutenanzeige durch die Spiegelung automatisch.

Uhrzeiten mit Stundenanzeige mit

nur Nullen: 00:00
nur Einsen: 11:11
nur Zweien: 22:55
nur Fünfen: –
Nullen und Einsen: 01:10 und 10:01
Nullen und Zweien: 02:50 und 20:05
Nullen und Fünfen: 05:20
Einsen und Zweien: 12:51 und 21:15
Einsen und Fünfen: 15:21
Zweien und Fünfen: –

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 610521	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a) Herleitung und Ergebnis	3 Punkte
Teil b) Herleitung und Ergebnis	7 Punkte

Aufgabe 610522	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a) Herleitung und Ergebnis	3 Punkte
Teil b) Herleitung und Ergebnis	3 Punkte
Teil c) Herleitung und Ergebnis	4 Punkte

Aufgabe 610523	*Insgesamt: 10 Punkte*
Herleitung	8 Punkte
Ergebnis	2 Punkte

Aufgabe 610524	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a) Herleitung und Ergebnis	2 Punkte
Teil b) Herleitung und Ergebnis	3 Punkte
Teil c) Herleitung und Ergebnis	5 Punkte

610621 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Der Buchstabe B steht an der Zehntausenderstelle beider Summanden und die Summe ist kleiner als 100 000. Folglich ist $2 \cdot B < 10$ und daher $B < 5$. Da B als erste Stelle einer Zahl nicht Null sein darf, sind die Ziffern 0, 5, 6, 7, 8 und 9 für B nicht möglich.

Teil b) Mit HONIG = 93782 lautet das Zahlenrätsel:

$$\begin{array}{r} \mathrm{B\ L\ \ddot{U}\ T\ E} \\ +\,\mathrm{B\ I\ E\ N\ E} \\ \hline 9\ 3\ 7\ 8\ 2 \end{array}$$

H, O, N, I und G sind schon als 9, 3, 7, 8 und 2 bekannt.

Aus der Addition der Einerstellen folgt, dass E + E entweder 2 oder 12, also E = 1 oder E = 6 gelten muss.

Fall 1: E = 1. Dann gilt für die Addition der Zehnerstellen N + T = 8 oder N + T = 18. Es ist aus der Aufgabenstellung bekannt, dass N = 7 ist. Die Summe 8 ist zu erreichen mit T = 1 oder T = 11. Beides ist nicht möglich, da wegen E = 1 nun T = 1 nicht mehr erlaubt ist und T = 11 entfällt, weil die Buchstaben nur für Ziffern stehen. Daher ist E = 1 nicht möglich.

Fall 2: E = 6. Dann gilt für die Addition an der Zehnerstelle N+T+1 = 8 oder N+T+1 = 18. Aus N = 7 folgt T = 0 oder T = 10. Da T = 10 wiederum nicht möglich ist, folgt eindeutig T = 0.

Für die Addition an der Hunderterstelle folgt nun Ü + E = 7 oder Ü + E = 17, und mit E = 6 ergibt sich Ü = 1 oder Ü = 11. Da Ü = 11 nicht möglich ist, folgt eindeutig Ü = 1.

Für die Addition an der Tausenderstelle gilt L + I = 3 oder L + I = 13, und mit I = 8 folgt als einzige Möglichkeit L = 5 und L + I = 13. Hieraus ergibt sich ein Übertrag zur Zehntausenderstelle, und aus B + B + 1 = 9 folgt B = 4.

Damit sind allen Buchstaben eindeutig Ziffern und allen Ziffern eindeutig Buchstaben zugeordnet:

B = 4, L = 5, Ü = 1, T = 0, E = 6, H = 9, O = 3, N = 7, I = 8 und G = 2.

610622 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Wenn die Klasse 6a gegen jede andere Klasse genau einmal spielt, werden drei Spiele durchgeführt. Genauso spielen auch die Klassen 6b, 6c und 6d je drei Spiele gegen die anderen Klassen. Folglich werden insgesamt $(4 \cdot 3 =)$ 12 Spiele durchgeführt, und hierbei hat jede Klasse gegen jede andere genau zweimal gespielt.

Erste Lösungsvariante: Die Klasse 6a spielt gegen jede andere Klasse genau zweimal; das sind $(3 \cdot 2 =)$ 6 Spiele. Dann gibt es für die Klasse 6b weitere $(2 \cdot 2 =)$ 4 Spiele. Schließlich gibt es noch zwei Spiele zwischen den Klassen 6c und 6d. Das sind insgesamt $(6 + 4 + 2 =)$ 12 Spiele.

Zweite Lösungsvariante: Die Darstellung in einer Spieletabelle oder systematische Auflistung aller möglichen Spiele liefert die gesuchte Zahl von 12 Spielen.

Teil b) Es gibt vier Klassen zur Auswahl für den 1. Platz. Wenn der 1. Platz fest steht, bleiben noch drei Klassen zur Auswahl für den 2. Platz, danach noch zwei Klassen für den 3. Platz und die letzte Klasse kommt auf den 4. Platz.

Insgesamt gibt es folglich $(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =)$ 24 mögliche Verteilungen der Klassen auf die Plätze 1 bis 4.

Teil c) Es werden zunächst die Mädchen betrachtet. Es gibt drei Möglichkeiten, die vier Klassen in zwei Zweiergruppen aufzuteilen, denn die Klasse 6a kann zusammen mit der 6b, der 6c oder 6d eine Zweiergruppe bilden. Die anderen beiden Klassen bilden automatisch die andere Zweiergruppe. Für jede Aufteilung der Zweiergruppen gibt es zwei Möglichkeiten für die Aufteilung auf die Umkleideräume M1 und M2. Folglich können sich die Mädchen in $(3 \cdot 2 =)$ 6 verschiedenen Möglichkeiten auf die Umkleideräume verteilen. Ebenso haben auch die Jungen 6 verschiedene Möglichkeiten, sich auf ihre Umkleideräume zu verteilen, und zwar unabhängig von den Verteilungen der Mädchen.

Damit gibt es insgesamt $(6 \cdot 6 =)$ 36 verschiedene Möglichkeiten für die Verteilung der Kinder auf die Umkleideräume.

610623 Lösung *10 Punkte*

Teil a)

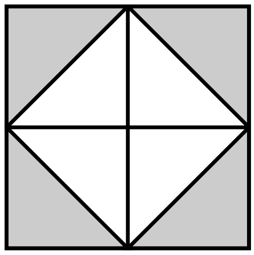
Fläche des Papierstreifens am Anfang:	A
Fläche nach dem 1. Schnitt:	$\frac{1}{2}A$
Fläche nach dem 2. Schnitt:	$\frac{1}{4}A$
Fläche nach dem 3. Schnitt:	$\frac{1}{8}A$
Fläche nach dem 4. Schnitt:	$\frac{1}{16}A$
Fläche nach dem 5. Schnitt:	$\frac{1}{32}A = 20\,\text{cm}^2$

Da sich der Flächeninhalt des Papierstreifens mit jedem Schnitt halbiert, beträgt er nach dem 5. Schnitt noch $\frac{1}{32}$ der Ausgangsfläche A. Folglich betrug der Flächeninhalt des Papierstreifens am Anfang $(32 \cdot 20\,\text{cm}^2 =)\ 640\,\text{cm}^2$. Damit ergibt sich die ursprüngliche Länge des Papierstreifens von $(640\,\text{cm}^2 : 5\,\text{cm} =)\ 128\,\text{cm}$.

Lösungsvariante: Die Länge des Papierstreifens nach dem 5. Schnitt beträgt $(20\,\text{cm}^2 : 5\,\text{cm} =)\ 4\,\text{cm}$. Da sich die Länge des Papierstreifens mit jedem Schnitt halbiert, beträgt sie nach 5 Schnitten noch $\frac{1}{32}$ der Ausgangslänge. Folglich war der Streifen zu Beginn $(32 \cdot 4\,\text{cm} =)\ 128\,\text{cm}$ lang und hatte einen Flächeninhalt von $(128\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm} =)\ 640\,\text{cm}^2$.

Teil b) Hier muss man erkennen, dass die jeweils abgeschnittene Fläche den gleichen Flächeninhalt hat wie die übrig bleibende (siehe Abbildung L 610623).

Fläche des Quadrats am Anfang: A
Fläche nach dem 1. Schnitt: $\frac{1}{2}A$
Fläche nach dem 2. Schnitt: $\frac{1}{4}A$
Fläche nach dem 3. Schnitt: $\frac{1}{8}A$
Fläche nach dem 4. Schnitt: $\frac{1}{16}A = 4\,\text{cm}^2$


L 610623

Da sich der Flächeninhalt des Quadrats mit jedem Schnitt halbiert, beträgt er nach dem 4. Schnitt noch $\frac{1}{16}$ der Ausgangsfläche A.

Folglich betrug der Flächeninhalt des Quadrats am Anfang $(4\,\text{cm}^2 \cdot 16 =)\ 64\,\text{cm}^2$. Weil $8^2 = 64$ ist, ergibt sich die Seitenlänge des Quadrats am Anfang von 8 cm.

610624 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Wenn eine solche Zahl durch 6 teilbar sein soll, muss sie gerade sein, folglich ist die letzte Ziffer eine 2.

Wenn ihre Quersumme 15 betragen soll, muss sie eine ungerade Anzahl von Ziffern 3 enthalten, also eine Drei oder drei Dreien, denn fünf oder mehr Dreien scheiden aus, da sie zusammen mit mindestens einer Zwei eine Quersumme größer als 15 ergeben.

Um auf die Quersumme 15 zu kommen, sind wegen $15 = 6 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3$ sechs Ziffern Zwei oder drei Ziffern Zwei nötig.

Die kleinste solcher Zahlen sollte die kleinste Anzahl von Stellen aufweisen. Sie muss also aus drei Ziffern 3 und drei Ziffern 2 bestehen, und die Ziffern 3 müssen möglichst weit „hinten“ in der Zahl stehen.

Folglich ist die gesuchte Zahl die 223332.

Teil b) Für eine möglichst große Zahl benötigen wir eine siebenstellige Zahl, bei der die eine Ziffer 3 möglichst weit vorn steht, also 3222222.

Teil c) *Aufzählende Lösung*:

3222222; 2322222; 2232222; 2223222; 2222322; 2222232

333222; 332322; 332232; 323322; 323232; 322332; 233322; 233232; 232332; 223332

Es gibt also 16 solcher Zahlen.

Lösungsvariante: Siebenstellige Zahlen: Die eine Ziffer 3 kann an den Stellen 1 bis 6 der siebenstelligen Zahl stehen. Das sind 6 Möglichkeiten.

Sechsstellige Zahlen: Da eine Ziffer 2 ganz hinten stehen muss, kommen für die anderen beiden Ziffern 2 die Stellen 1 bis 5 der sechsstelligen Zahl in Frage. Folglich müssen aus fünf Elementen zwei ausgewählt werden. Dafür gibt es $(4 + 3 + 2 + 1 =)\ 10$ Möglichkeiten.

Folglich gibt es insgesamt 16 solcher Zahlen.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 610621	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a) Herleitung und Ergebnis	3 Punkte
Teil b) Herleitung und Ergebnis	7 Punkte

Aufgabe 610622	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a) Herleitung und Ergebnis	2 Punkte
Teil b) Herleitung und Ergebnis	3 Punkte
Teil c) Herleitung und Ergebnis	5 Punkte

Aufgabe 610623	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a) Herleitung und Ergebnis	5 Punkte
Teil b) Herleitung und Ergebnis	5 Punkte

Hinweis: Rein zeichnerische Lösungen sind erlaubt. Bei einem hinreichend genauen Ergebnis gibt dies jeweils 3 von 5 Punkten.

Aufgabe 610624	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a) Herleitung und Ergebnis	4 Punkte
Teil b) Herleitung und Ergebnis	2 Punkte
Teil c) Herleitung und Ergebnis	4 Punkte

61. Mathematik-Olympiade
2. Runde (Regionalrunde)
Lösungen

610721 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Der Stundenzeiger benötigt $(100 \cdot 12\,\mathrm{h} =)$ 1200 Stunden. Das sind 50 Tage. Der Minutenzeiger benötigt $(100 \cdot 1\,\mathrm{h} =)$ 100 Stunden. Wegen $100\,\mathrm{h} = 4 \cdot 24\,\mathrm{h} + 4\,\mathrm{h}$ sind das 4 Tage und 4 Stunden oder $4\frac{1}{6}$ Tage. Der Sekundenzeiger benötigt $(100 \cdot 1\,\mathrm{min} =)$ 100 Minuten. Wegen $100\,\mathrm{min} = 1 \cdot 60\,\mathrm{min} + 40\,\mathrm{min}$ sind das 1 Stunde und 40 Minuten oder $1\frac{2}{3}$ Stunden.

Teil b) Der erste Überholvorgang findet um 12 Uhr statt, der zweite zwischen 13 Uhr und 14 Uhr, der dritte zwischen 14 Uhr und 15 Uhr und der elfte Überholvorgang zwischen 22 Uhr und 23 Uhr.

Folglich überholt der Minutenzeiger den Stundenzeiger genau 11-mal.

Teil c) Um 16:20 Uhr steht der Minutenzeiger auf der 4-Uhr-Markierung. Der Stundenzeiger stand um 16:00 Uhr auf der 4-Uhr-Markierung. Dieser dreht sich in einer Stunde um $(360^\circ : 12 =)$ 30° und folglich in 20 Minuten um $(\frac{20}{60} \cdot 30^\circ =)$ 10°. Daher schließen die Zeiger um 16:20 Uhr einen spitzen Winkel der Größe von 10° ein.

610722 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Legt man den vierten Stein so auf den ersten Stein, dass die Felder mit der Augenzahl 1 übereinanderliegen, dann liegt das Feld mit der Augenzahl 2 des vierten Steins über dem Feld mit der Augenzahl 3 des ersten Steins, weswegen beide Steine als verschieden gelten.

Teil b) Da es in diesem Spiel genau 4 Augenzahlen gibt, nämlich 1, 2, 3 und 4, gibt es auch genau vier Trimino-Steine, bei denen jeweils alle drei Felder mit der gleichen Augenzahl bedruckt sind.

Teil c) Da es nur die Augenzahlen 1, 2, 3 und 4 gibt, gibt es genau 4 Möglichkeiten zur Auswahl der Augenzahl, die genau zweimal vorkommen soll. Danach gibt es noch genau drei Möglichkeiten zur Auswahl der Augenzahl, die nur einmal vorkommt. Wir betrachten nun eine solche Auswahl der beiden Augenzahlen und zwei Trimino-Steine mit diesen beiden Augenzahlen. Legt man nun die beiden Trimino-Steine so übereinander, dass die Felder mit der einmaligen Augenzahl übereinanderliegen, dann liegen auch die Felder mit der zweimaligen Augenzahl übereinander. Die beiden Steine gelten also als gleich. Da das Spiel keine zwei gleichen Trimino-Steine, aber sonst alle Trimino-Steine der in der Aufgabenstellung beschriebenen Art enthält, ist $(4 \cdot 3 =)$ 12 die Anzahl aller Trimino-Steine dieses Spieles, bei denen genau zwei Felder mit der gleichen Augenzahl bedruckt sind.

Teil d) Bei den Trimino-Steinen im Spiel sind entweder alle drei oder nur zwei oder keine zwei Felder mit der gleichen Augenzahl bedruckt.

Wir bestimmen die Anzahl der Trimino-Steine, bei denen keine zwei Felder mit der gleichen Augenzahl bedruckt sind. Dann gibt es genau eine Augenzahl, die nicht vorkommt.

Wir betrachten Trimino-Steine, bei denen kein Feld mit der Augenzahl 1 bedruckt ist. Dann sind die drei Felder mit den Augenzahlen 2, 3 und 4 bedruckt, wobei sich durch Tausch der Platzierung der Augenzahlen 3 und 4 ein anderer Stein ergibt. Die Anzahl dieser Trimino-Steine ist also 2.

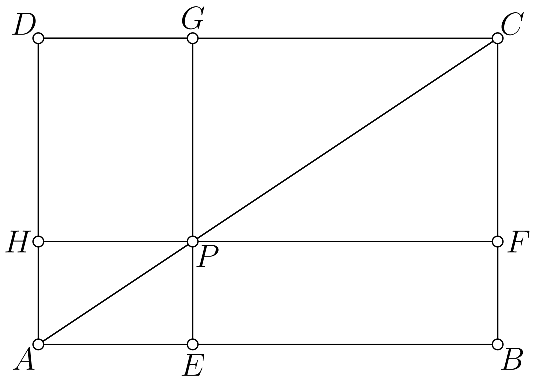
Entsprechend finden wir jeweils genau 2 solche Steine, bei denen kein Feld mit der Augenzahl 2, 3 bzw. 4 bedruckt ist.

Insgesamt gibt es also $(2 + 2 + 2 + 2 =)$ 8 solche Steine.

Nach Teil b) und Teil c) ist daher $(4 + 12 + 8 =)$ 24 die Anzahl der Trimino-Steine in diesem Spiel.

<u>610723 Lösung</u> *10 Punkte*

Teil a) Da der Punkt E auf der Seite $\overline{AB}$ liegt und nach Voraussetzung $|AB| = 9\,\text{cm}$ und $|AE| = 3\,\text{cm}$ gelten, folgt $|BE| = |AB| - |AE| = 9\,\text{cm} - 3\,\text{cm} = 6\,\text{cm}$. Wegen $|BE| = 6\,\text{cm}$ und der Voraussetzung $|BF| = 2\,\text{cm}$ hat das Rechteck $BFPE$ daher den Flächeninhalt $(6\,\text{cm} \cdot 2\,\text{cm} =)\ 12\,\text{cm}^2$.



L 610723

Da nach Voraussetzung das Viereck $ABCD$ ein Rechteck ist, die Gerade EG parallel zur Geraden AD ist und der Punkt E zwischen den Punkten A und B liegt, wird das Viereck $ABCD$ durch die Gerade EG in die Rechtecke $AEGD$ und $BCGE$ zerlegt.

Da nach Voraussetzung das Viereck $ABCD$ ein Rechteck ist, die Gerade FH parallel zur Geraden AB ist und der Punkt F zwischen den Punkten B und C liegt, wird das Viereck $ABCD$ durch die Gerade FH in die Rechtecke $ABFH$ und $CDHF$ zerlegt.

Da das Viereck $ABFH$ ein Rechteck ist, in jedem Rechteck gegenüberliegende Seiten gleich lang sind und nach Voraussetzung $|BF| = 2\,\text{cm}$ gilt, folgt $|AH| = 2\,\text{cm}$. Da das Viereck $AEGD$ ein Rechteck ist, in jedem Rechteck gegenüberliegende Seiten gleich lang sind und nach Voraussetzung $|AE| = 3\,\text{cm}$ gilt, gilt auch $|DG| = 3\,\text{cm}$. Da der Punkt H auf der Seite $\overline{AD}$ liegt und nach Voraussetzung $|AD| = 6\,\text{cm}$ gilt, folgt $|DH| = |AD| - |AH| = 6\,\text{cm} - 2\,\text{cm} = 4\,\text{cm}$.

Wegen $|DG| = 3\,\text{cm}$ und $|DH| = 4\,\text{cm}$ und nach der Flächeninhaltsformel für Rechtecke hat das Rechteck $DHPG$ den Flächeninhalt $(3\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm} =)\ 12\,\text{cm}^2$.

Teil b) Es seien $ABCD$ ein beliebiges Rechteck, P ein innerer Punkt der Diagonalen $\overline{AC}$ und die Punkte E, F, G und H die dann nach der Aufgabenstellung festgelegten Punkte. Da der Punkt P der Schnittpunkt der Geraden EG und FH ist, wird das Viereck $ABCD$ in Fortsetzung der Argumentation aus Teil a) durch die Geraden EG und FH in die Rechtecke $AEPH$, $BFPE$, $CGPF$ und $DHPG$ zerlegt.

Jedes Rechteck wird durch jede seiner Diagonalen in zwei kongruente, also auch flächengleiche rechtwinklige Dreiecke zerlegt. Folglich haben die Dreiecke ABC und ACD im Rechteck $ABCD$ den gleichen Flächeninhalt. Wir bezeichnen ihn mit F_1. Mit der gleichen Begründung haben im Rechteck $AEPH$ die Dreiecke AEP und APH den gleichen Flächeninhalt, den wir mit F_2 bezeichnen. Ebenso haben schließlich im Rechteck $CGPF$ die Dreiecke CGP und CPF den gleichen Flächeninhalt, den wir mit F_3 bezeichnen.

Da sich das Dreieck ABC aus den Dreiecken AEP und CPF sowie dem Rechteck $BFPE$ zusammensetzt, ist $F_1 - F_2 - F_3$ der Flächeninhalt des Rechtecks $BFPE$. Da sich das Dreieck

ACD aus den Dreiecken APH und CGP sowie dem Rechteck $DHPG$ zusammensetzt, ist $F_1 - F_2 - F_3$ auch der Flächeninhalt des Rechtecks $DHPG$.

Folglich sind die Rechtecke $BFPE$ und $DHPG$ flächeninhaltsgleich.

610724 Lösung *10 Punkte*

Teil b) Für eine Schokoladentafel nennen wir die Anzahl der unteilbaren Stücke in Längenrichtung Längenzahl, in Breitenrichtung Breitenzahl und deren Summe die Längenbreitenzahl dieser Tafel.

Durch Abbrechen entlang einer Bruchlinie verringert sich entweder die Breitenzahl bei unveränderter Längenzahl oder die Längenzahl bei unveränderter Breitenzahl und daher die Längenbreitenzahl um mindestens 1.

Die Tafel am ersten Tag hat vor dem Abbrechen die Längenbreitenzahl $L + B$. Die Tafel am letzten Tag ist eine Tafel vom Format 1×1 und hat die Längenbreitenzahl 2, da sie andernfalls nochmals geteilt werden könnte. Da bei jedem Abbrechen die Längenbreitenzahl um mindestens 1 kleiner wird, kann nur höchstens $(L + B - 2)$-mal abgebrochen werden, es kann also nur höchstens $L + B - 2$ Tage dauern, bis das Reststück das Format 1×1 hat und dann am nächsten Tag ganz aufgegessen wird. Es sind also höchstens $((L + B - 2) + 1 =)\ L + B - 1$ Tage, an denen Tim jeweils ein Stück seiner Schokoladentafel essen kann.

Tatsächlich kann Tim die Tafel so auch an $L + B - 1$ Tagen aufessen: Solange die Längenzahl noch größer als 1 ist, bricht er ein Stück vom Format $1\times B$ ab. Das kann er genau $L - 1$ Tage tun. Solange dann die Breitenzahl noch größer als 1 ist, bricht er ein Stück vom Format 1×1 ab. Das kann er genau $B - 1$ Tage tun. Übrig bleibt ein Stück vom Format 1×1 für den letzten Tag. Zusammen sind dies $((L - 1) + (B - 1) + 1 =)\ L + B - 1$ Tage.

Die größtmögliche Tagesanzahl, an denen Tim jeweils ein Stück seiner Schokoladentafel essen kann, ist also $L + B - 1$.

Teil a) Hier gelten $L = 4$ und $B = 4$. Daher folgt nach der Lösung für Teilaufgabe b):

Die größtmögliche Tagesanzahl, an denen Tim jeweils ein Stück seiner Schokoladentafel essen kann, ist $(L + B - 1 = 4 + 4 - 1 =)\ 7$. Das erreicht er, indem er an drei Tagen jeweils ein Stück vom Format 1×4 abbricht und aufisst und dann das verbliebene Reststück vom Format 1×4 an den nächsten drei Tagen durch Abbrechen und Aufessen jeweils eines Stückes vom Format 1×1 zu einem Reststück vom Format 1×1 macht, was er am 7. Tag aufisst.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 610721 — *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a)	Allgemeine Methode für die Berechnungen der Zeiten	1 Punkt
	Richtige Zeiten für die drei Zeiger	3 Punkte
Teil b)	Richtige Antwort	1 Punkt
	Begründung	2 Punkte
Teil c)	Richtiges Ergebnis	1 Punkt
	Begründung	2 Punkte

Aufgabe 610722 — *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a)	2 Punkte
Teil b)	1 Punkt
Teil c)	3 Punkte
Teil d)	4 Punkte

Aufgabe 610723 — *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a)	Prinzipiell geeigneter Lösungsanatz (z. B. Skizze)	1 Punkt
	Bestimmung der erforderlichen Streckenlängen	1 Punkt
	Berechnung der beiden Flächeninhalte	2 Punkte
Teil b)	Prinzipiell geeignete Methode (z. B. Flächenzerlegung)	3 Punkte
	Nachweis der Flächeninhaltsgleichheit der beiden Rechtecke	3 Punkte

Aufgabe 610724 — *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a)	Angabe der korrekten größtmöglichen Tagesanzahl	1 Punkt
	Begründung, dass eine größere Tagesanzahl nicht möglich ist	2 Punkte
	Begründung, dass diese Tagesanzahl möglich ist	1 Punkt
Teil b)	Angabe der korrekten Formel für die größtmögliche Tagesanzahl	1 Punkt
	Begründung, dass eine größere Tagesanzahl nicht möglich ist	3 Punkte
	Begründung, dass diese Tagesanzahl möglich ist	2 Punkte

Hinweis: Für die Begründungen zu Teil a) genügt der Verweis auf Teil b), wenn dort die entsprechenden Begründungen korrekt sind.

610821 Lösung *10 Punkte*

Erste Lösung: Teil a) Amelie hat in Geografie bisher fünf Noten bekommen, und zwar zwei Einsen, zwei Zweien und eine Drei. Mit drei weiteren Einsen würde sie einen Notendurchschnitt $(\frac{5\cdot1+2\cdot2+1\cdot3}{5+3} = \frac{12}{8} =)$ 1,5 erreichen und damit noch nicht besser als 1,5. Mit vier weiteren Einsen würde ihr Notendurchschnitt wegen $\frac{6\cdot1+2\cdot2+1\cdot3}{5+4} = \frac{13}{9} < 1{,}5$ besser als 1,5 sein.

Wenn sie nur noch Einsen bekommt, benötigt Amelie im Fach Geografie also noch 4 Einsen, um einen Notendurchschnitt besser als 1,5 zu erreichen.

Teil b) Amelie hat in Mathematik vier Klassenarbeiten mit den Noten 1, 3, 1 und 2 und daher mit dem arithmetischen Mittel $(\frac{2\cdot1+1\cdot2+1\cdot3}{4} = \frac{7}{4} =)$ 1,75 geschrieben.

Mit den bisherigen fünf Noten 1, 2, 1, 1 und 1 sowie drei weiteren Einsen ist $(\frac{7\cdot1+1\cdot2}{8} =)$ $\frac{9}{8}$ das arithmetische Mittel der Noten der sonstigen Leistungen. Da sich der Notendurchschnitt als Summe von 60 % des arithmetischen Mittels der Noten der Klassenarbeiten und von 40 % des arithmetischen Mittels der Noten der sonstigen Leistungen berechnet, hätte sie dann den Notendurchschnitt $(0{,}6 \cdot \frac{7}{4} + 0{,}4 \cdot \frac{9}{8} = 1{,}05 + 0{,}45 =)$ 1,5 und damit noch nicht besser als 1,5. Mit vier weiteren Einsen in den sonstigen Leistungen würde sich das arithmetische Mittel der Noten der sonstigen Leistungen auf $(\frac{8\cdot1+1\cdot2}{9} =)$ $\frac{10}{9}$ verbessern und wegen $0{,}6 \cdot \frac{7}{4} + 0{,}4 \cdot \frac{10}{9} = 1{,}05 + 0{,}\overline{4} = 1{,}49\overline{4}$ ein Notendurchschnitt besser als 1,5 ergeben.

Wenn sie nur noch Einsen bekommt, benötigt Amelie im Fach Mathematik also noch 4 Einsen in den sonstigen Leistungen, um einen Notendurchschnitt besser als 1,5 zu erreichen.

Zweite Lösung: Teil a) Es sei x die kleinste Anzahl an Einsen, mit der Amelie einen Notendurchschnitt in Geografie besser als 1,5 erreicht, wenn sie nur noch Einsen bekommt.

Amelie hat in Geografie bisher 5 Noten bekommen, und zwar zwei Einsen, zwei Zweien und eine Drei. Da sich der Notendurchschnitt aus dem arithmetischen Mittel aller Noten ergibt, hat sie zusammen mit den x Einsen genau $5 + x$ Noten mit dem arithmetischen Mittel $(\frac{(2+x)\cdot1+2\cdot2+1\cdot3}{5+x} =)$ $\frac{9+x}{5+x}$. Da dies besser als 1,5 ist, gilt $\frac{9+x}{5+x} < 1{,}5$. Hieraus folgt $9+x < 7{,}5+1{,}5\cdot x$, $1{,}5 < 0{,}5 \cdot x$ und daher $x > 3$. Mit vier weiteren Noten 1 ist der Notendurchschnitt wegen $\frac{6\cdot1+2\cdot2+1\cdot3}{5+4} = \frac{13}{9} < 1{,}5$ tatsächlich besser als 1,5.

Wenn sie nur noch Einsen bekommt, benötigt Amelie im Fach Geografie also noch 4 Einsen, um einen Notendurchschnitt besser als 1,5 zu erreichen.

Teil b) Es sei y die kleinste Anzahl an Einsen in den sonstigen Leistungen, mit der Amelie einen Notendurchschnitt in Mathematik besser als 1,5 erreicht, wenn sie nur noch Einsen bekommt.

Amelie hat in Mathematik vier Klassenarbeiten mit den Noten 1, 3, 1 und 2 und daher mit dem arithmetischen Mittel $(\frac{2\cdot1+1\cdot2+1\cdot3}{4} = \frac{7}{4} =)$ 1,75 geschrieben. Hinzu kommen die bisherigen fünf Noten 1, 2, 1, 1 und 1 in den sonstigen Leistungen. Zusammen mit weiteren y Einsen in den sonstigen Leistungen ergibt sich das arithmetische Mittel $(\frac{(4+y)\cdot1+1\cdot2}{5+y} =)$ $\frac{6+y}{5+y}$. Da sich der Notendurchschnitt als Summe von 60 % des arithmetischen Mittels der Noten der Klassenarbeiten und von 40 % des arithmetischen Mittels der Noten der sonstigen Leistungen berechnet und dieser Notendurchschnitt besser als 1,5 ist, gilt $0{,}6 \cdot 1{,}75 + 0{,}4 \cdot \frac{6+y}{5+y} < 1{,}5$. Hieraus folgt $0{,}4 \cdot \frac{6+y}{5+y} < 0{,}45$, $\frac{6+y}{5+y} < \frac{9}{8}$, $48 + 8 \cdot y < 9 \cdot y + 45$ und daher $y > 3$. Mit vier weiteren Noten 1 in den sonstigen Leistungen ist der Notendurchschnitt wegen $0{,}6 \cdot \frac{7}{4} + 0{,}4 \cdot \frac{6+4}{5+4} = \frac{21}{20} + \frac{4}{9} = \frac{269}{180} < \frac{270}{180} = 1{,}5$ tatsächlich besser als 1,5.

Wenn sie nur noch Einsen bekommt, benötigt Amelie im Fach Mathematik also noch 4 Einsen in den sonstigen Leistungen, um einen Notendurchschnitt besser als 1,5 zu erreichen.

610822 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Eine dreistellige Zahl ist genau dann eine Palindromzahl, wenn ihre Ziffer an der Hunderterstelle mit ihrer Ziffer an der Einerstelle übereinstimmt. Die Ziffer an der Hunderterstelle ist eine der 9 Ziffern von 1 bis 9. Für die verbleibende Ziffer an der Zehnerstelle ist jede der 10 Ziffern von 0 bis 9 möglich.

Folglich gibt es genau $(9 \cdot 10 =)$ 90 dreistellige Palindromzahlen.

Teil b) Eine fünfstellige Zahl ist genau dann eine Palindromzahl, wenn ihre Ziffer an der Zehntausenderstelle mit ihrer Ziffer an der Einerstelle und ihre Ziffer an der Tausenderstelle mit ihrer Ziffer an der Zehnerstelle übereinstimmen. Die Ziffer an der Zehntausenderstelle ist eine der 9 Ziffern von 1 bis 9. Als Ziffer an der Tausenderstelle ist jede der 10 Ziffern von 0 bis 9 möglich. Auch für die verbleibende Ziffer an der Hunderterstelle ist jede der 10 Ziffern von 0 bis 9 möglich.

Folglich gibt es genau $(9 \cdot 10 \cdot 10 =)$ 900 fünfstellige Palindromzahlen.

Teil c) I. Es seien A, B und C Ziffern, für die $ABCBA$ eine Palindromzahl mit den Eigenschaften (1), (2) und (3) ist. Wegen (3) ist A kleiner als 5. Da A auch an der ersten Stelle steht, ist A verschieden von 0. Wegen (2) und nach der Teilbarkeitsregel für die 6 ist A gerade. Folglich ist A eine der Ziffern 2 und 4.

Es gelte $A = 2$. Wegen (3) gilt $B = 4$. Wegen (2) und nach der Teilbarkeitsregel für die 6 ist die Quersumme von $ABCBA$ durch 3 teilbar. Wegen $2 + 4 + C + 4 + 2 = 12 + C$ ist C durch 3 teilbar. Daher ist C eine der Ziffern 0, 3, 6 und 9, womit sich die Palindromzahlen

$$24042\,, \qquad 24342\,, \qquad 24642\,, \qquad 24942 \tag{4}$$

ergeben.

Es gelte $A = 4$. Wegen (3) gilt $B = 8$. Wegen (2) und nach der Teilbarkeitsregel für die 6 ist die Quersumme von $ABCBA$ durch 3 teilbar. Wegen $4 + 8 + C + 8 + 4 = 24 + C$ ist C durch 3 teilbar. Daher ist C eine der Ziffern 0, 3, 6 und 9, womit sich die Palindromzahlen

$$48084\,, \qquad 48384\,, \qquad 48684\,, \qquad 48984 \tag{5}$$

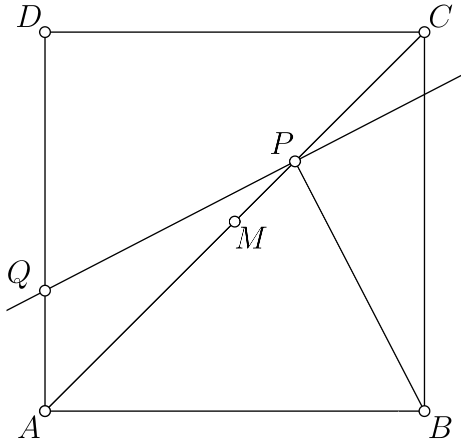
ergeben.

II. Die in (4) und (5) genannten Zahlen sind tatsächlich fünfstellige Palindromzahlen mit den Eigenschaften (1), (2) und (3).

Aus I. und II. folgt: Nur die in (4) und (5) angegebenen Zahlen sind die gesuchten Palindromzahlen.

610823 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Zeichnung (im vorliegenden Ausdruck möglicherweise nicht maßstabsgerecht):



L 610823 a

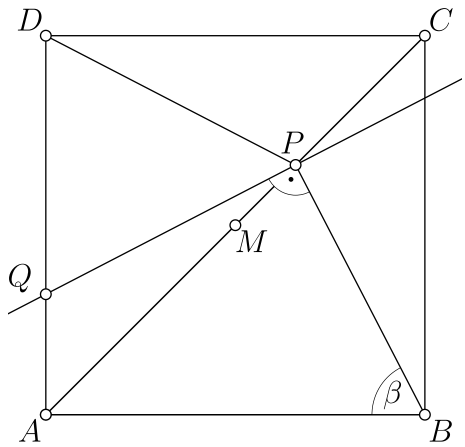
Teil b) Vermutung: Die Strecken $\overline{BP}$ und $\overline{PQ}$ sind gleich lang.

Teil c) *Erste Lösung:* Wir bezeichnen die Größe des Winkels $\sphericalangle PBA$ mit β, siehe Abbildung L 610823 b. Da das Quadrat $ABCD$ symmetrisch zu seinen Diagonalen ist, gelten

$$|BP| = |DP| \tag{1}$$

und

$$|\sphericalangle ADP| = |\sphericalangle PBA| = \beta\,. \tag{2}$$



L 610823 b

Da der Punkt Q auf der Quadratseite $\overline{AD}$ liegt und von den Punkten A und D verschieden ist, gilt $\sphericalangle ADP = \sphericalangle QDP$ und wegen (2) daher

$$|\sphericalangle QDP| = \beta\,. \tag{3}$$

Nach Voraussetzung ist $\sphericalangle QPB$ ein rechter Winkel. Da $ABCD$ ein Quadrat ist und Q auf der Quadratseite $\overline{AD}$ liegt und von den Punkten A und D verschieden ist, ist auch $\sphericalangle BAQ$ ein rechter Winkel. Nach dem Innenwinkelsatz für Vierecke gilt daher

$$\begin{aligned}|\sphericalangle AQP| &= 360^\circ - |\sphericalangle BAQ| - |\sphericalangle PBA| - |\sphericalangle QPB|\\ &= 360^\circ - 90^\circ - \beta - 90^\circ\\ &= 180^\circ - \beta\,.\end{aligned}$$

Da der Punkt Q auf der Quadratseite $\overline{AD}$ liegt und von den Punkten A und D verschieden ist, folgt daher nach dem Nebenwinkelsatz

$$|\sphericalangle PQD| = \beta\,. \tag{4}$$

Aus (3) und (4) sowie nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes folgt $|PQ| = |DP|$ und wegen (1) daher auch $|BP| = |PQ|$, womit die Vermutung bewiesen ist.

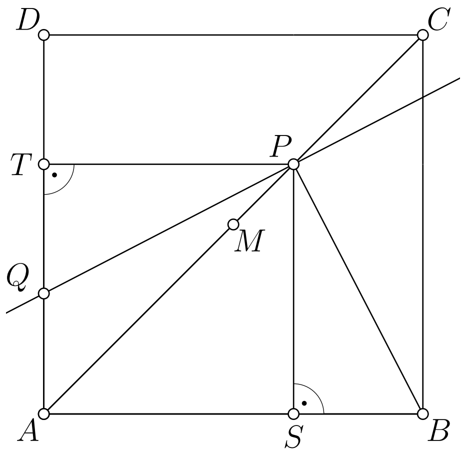
Teil c) Zweite Lösung: Nach Voraussetzungen gelten:

(1) Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat und M ist der Mittelpunkt der Diagonalen $\overline{AC}$.

(2) Der Punkt P ist ein innerer Punkt der Strecke $\overline{CM}$.

(3) Die Senkrechte auf der Geraden BP durch den Punkt P schneidet die Gerade AD im Punkt Q.

(4) Der Punkt Q ist ein innerer Punkt der Strecke $\overline{AD}$.



L 610823 c

Es seien S der Schnittpunkt der Senkrechten zur Geraden AB durch den Punkt P mit der Geraden AB und T der Schnittpunkt der Senkrechten zur Geraden AD durch den Punkt P mit der Geraden AD, siehe Abbildung L 610823 c. Wir zeigen, dass die Dreiecke BPS und PTQ kongruent zueinander sind und daher $|BP| = |PQ|$ gilt.

Wegen (3) gilt

$$|\sphericalangle QPB| = 90^\circ\,. \tag{5}$$

Da jeder Punkt auf einer Winkelhalbierenden eines Winkels gleichen Abstand zu den Schenkeln des Winkels hat und der Punkt P wegen (1) und (2) auf der Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle BAD$ liegt, gelten nach Wahl der Punkte S und T

$$|PS| = |PT| \tag{6}$$

und

$$|\sphericalangle ATP| = |\sphericalangle BSP| = 90^\circ\,. \tag{7}$$

Zudem ist S ein innerer Punkt der Strecke $\overline{AB}$ und T ist ein innerer Punkt der Strecke $\overline{AD}$. Wegen (1) und (7) hat das Vierecke $ASPT$ drei rechte Innenwinkel. Nach dem Innenwinkelsatz für Vierecke gilt daher auch

$$|\sphericalangle TPS| = 90^\circ\,. \tag{8}$$

Da der Punkt P wegen (1) und (2) ein innerer Punkt der Strecke $\overline{AC}$ ist und $|\sphericalangle CBA|$ wegen (1) ein rechter Winkel ist, ist $\sphericalangle PBA$ ein spitzer Winkel. Da wegen (1), (3) und (4) auch die Winkel $\sphericalangle BAQ$ und $\sphericalangle QPB$ rechte Winkel sind, ist der Winkel $\sphericalangle AQP$ nach dem Innenwinkelsatz für Vierecke ein stumpfer Winkel. Wegen (7) folgt, dass der Punkt Q ein innerer Punkt der Strecke $\overline{AT}$ ist. Hieraus und aus (7) folgt

$$|\sphericalangle QTP| = |\sphericalangle BSP| = 90^\circ\,. \tag{9}$$

Weiter folgt wegen dieser Lage des Punktes Q und wegen (5)

$$|\sphericalangle TPB| = |\sphericalangle TPQ| + |\sphericalangle QPB| = |\sphericalangle TPQ| + 90^\circ\,. \tag{10}$$

Da S ein innerer Punkt der Strecke $\overline{AB}$ ist, gilt wegen (8) auch

$$|\sphericalangle TPB| = |\sphericalangle TPS| + |\sphericalangle SPB| = 90^\circ + |\sphericalangle SPB|\,. \tag{11}$$

Aus (10) und (11) folgt

$$|\sphericalangle SPB| = |\sphericalangle TPQ|\,. \tag{12}$$

Wegen (9), (6) und (12) sind die Dreiecke BPS und PTQ nach (wsw) kongruent zueinander und es gilt $|BP| = |PQ|$, womit die Vermutung bewiesen ist.

610824 Lösung *10 Punkte*

Erste Lösung: Wir müssen zwei Fälle unterscheiden, je nachdem ob 13 der Nenner des Minuenden oder des Subtrahenden ist.

Fall 1: Es seien a und b positive ganze Zahlen, für die $\frac{59}{221}$ die Differenz der echten Brüche $\frac{a}{13}$ und $\frac{b}{17}$ ist, also

$$\frac{59}{221} = \frac{a}{13} - \frac{b}{17} \tag{1}$$

mit $a < 13$ und $b < 17$ gilt.

Aus der Gleichung (1) erhalten wir durch Multiplikation beider Seiten mit $(13 \cdot 17 =)$ 221

$$59 = 17 \cdot a - 13 \cdot b$$

und nach Umstellen

$$b = \frac{17 \cdot a - 59}{13}\,. \tag{2}$$

Da b positiv ist, folgt $17 \cdot a > 59$ und schließlich $a > 3$. Wenn also $\frac{59}{221}$ die Differenz der echten Brüche $\frac{a}{13}$ und $\frac{b}{17}$ ist, dann gelten (2), $3 < a < 13$ und $b < 17$.

Wir berechnen daher für alle natürlichen Zahlen a von 4 bis 12 die Zahl $17 \cdot a - 59$, untersuchen sie auf Teilbarkeit durch 13 und berechnen gegebenenfalls die Zahl b mit (2).

a	$17 \cdot a - 59$	durch 13 teilbar	b
4	9	nein	
5	26	ja	2
6	43	nein	
7	60	nein	
8	77	nein	
9	94	nein	
10	111	nein	
11	128	nein	
12	145	nein	

Daher erhält man nur für $a = 5$ eine ganze Zahl b, und zwar gilt dann $b = 2$.

Tatsächlich sind $\frac{5}{13}$ und $\frac{2}{17}$ echte Brüche und es gilt $\frac{5}{13} - \frac{2}{17} = \frac{59}{221}$.

Fall 2: Es seien nun a und b positive ganze Zahlen, für die $\frac{59}{221}$ die Differenz der echten Brüche $\frac{a}{17}$ und $\frac{b}{13}$ ist, also

$$\frac{59}{221} = \frac{a}{17} - \frac{b}{13} \tag{3}$$

mit $a < 17$ und $b < 13$ gilt.

Aus der Gleichung (3) erhalten wir durch Multiplikation beider Seiten mit $(13 \cdot 17 =)$ 221

$$59 = 13 \cdot a - 17 \cdot b$$

und nach Umstellen

$$a = \frac{17 \cdot b + 59}{13}\,. \tag{4}$$

Wegen $a < 17$ und $\frac{17 \cdot 10 + 59}{13} > 17$ folgt $b < 10$. Wenn also $\frac{59}{221}$ die Differenz der echten Brüche $\frac{b}{13}$ und $\frac{a}{17}$ ist, dann gelten (4), $a < 17$ und $0 < b < 10$. Wir berechnen daher für alle natürlichen Zahlen b von 1 bis 9 die Zahl $17 \cdot b + 59$, untersuchen sie auf Teilbarkeit durch 13 und berechnen die Zahl a mit (4).

b	$17 \cdot b + 59$	durch 13 teilbar	a
1	76	nein	
2	93	nein	
3	110	nein	
4	127	nein	
5	144	nein	
6	161	nein	
7	178	nein	
8	195	ja	15
9	212	nein	

Daher erhält man nur für $b = 8$ eine ganze Zahl a, und zwar gilt dann $a = 15$.
Tatsächlich sind $\frac{15}{17}$ und $\frac{8}{13}$ echte Brüche und es gilt $\frac{15}{17} - \frac{8}{13} = \frac{59}{221}$.

Es existieren also nur zwei verschiedene Paare positiver echter Brüche mit der Differenz $\frac{59}{221}$, wobei einer der Brüche den Nenner 17 und der andere den Nenner 13 hat, nämlich $\frac{5}{13}$ und $\frac{2}{17}$ sowie $\frac{15}{17}$ und $\frac{8}{13}$.

Zweite Lösung: I. Es seien a und b positive ganze Zahlen, für die $\frac{a}{13}$ und $\frac{b}{17}$ echte Brüche sind und $\frac{59}{221} = \frac{a}{13} - \frac{b}{17}$ oder $\frac{59}{221} = \frac{b}{17} - \frac{a}{13}$ gilt. Da $\frac{a}{13}$ und $\frac{b}{17}$ echte Brüche sind, gelten $a < 13$ und $b < 17$.

Es gelte zuerst

$$\frac{59}{221} = \frac{a}{13} - \frac{b}{17}\,. \tag{1}$$

Durch Multiplikation beider Seiten von (1) mit $13 \cdot 17$ folgt $59 = 17 \cdot a - 13 \cdot b$ und hieraus

$$b = \frac{17 \cdot a - 59}{13} = a - 4 + \frac{4 \cdot a - 7}{13}\,. \tag{2}$$

Da a und b ganze Zahlen sind, ist $4 \cdot a - 7$ durch 13 teilbar. Daher ist auch das Dreifache dieser Zahl, also $12 \cdot a - 21$, durch 13 teilbar. Wegen $12 \cdot a - 21 = (13 \cdot a - 26) + (5 - a)$ ist daher $a - 5$ durch 13 teilbar. Wegen $0 < a < 13$ folgt hieraus $a = 5$ und wegen (2) schließlich $b = 2$.

Es gelte nun

$$\frac{59}{221} = \frac{b}{17} - \frac{a}{13}\,. \tag{3}$$

Durch Multiplikation beider Seiten von (3) mit $13 \cdot 17$ folgt $59 = 13 \cdot b - 17 \cdot a$ und hieraus

$$b = \frac{17 \cdot a + 59}{13} = a + 4 + \frac{4 \cdot a + 7}{13}\,. \tag{4}$$

Da a und b ganze Zahlen sind, ist $4 \cdot a + 7$ durch 13 teilbar. Daher ist auch das Dreifache dieser Zahl, also $12 \cdot a + 21$, durch 13 teilbar. Wegen $12 \cdot a + 21 = (13 \cdot a + 13) + (8 - a)$ ist daher $a - 8$ durch 13 teilbar. Wegen $0 < a < 13$ folgt hieraus $a = 8$ und wegen (4) schließlich $b = 15$.

II. Für $a = 5$ und $b = 2$ sind $\frac{a}{13}$ und $\frac{b}{17}$ tatsächlich positive echte Brüche und es gilt $\frac{a}{13} - \frac{b}{17} = \frac{59}{221}$.
Für $a = 8$ und $b = 15$ sind $\frac{a}{13}$ und $\frac{b}{17}$ tatsächlich echte Brüche und es gilt $\frac{b}{17} - \frac{a}{13} = \frac{59}{221}$.

Aus I. und II. folgt: Es gibt nur zwei verschiedene Paare positiver echter Brüche mit der Differenz $\frac{59}{221}$, wobei einer der Brüche den Nenner 17 und der andere den Nenner 13 hat, nämlich $\frac{5}{13}$ und $\frac{2}{17}$ sowie $\frac{15}{17}$ und $\frac{8}{13}$.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 610821	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a)	4 Punkte
Teil b)	6 Punkte

Aufgabe 610822	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a)	2 Punkte
Teil b)	2 Punkte
Teil c) Herleitung	4 Punkte
Probe	1 Punkt
Korrektes Ergebnis	1 Punkt

Aufgabe 610823	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a)	2 Punkte
Teil b)	1 Punkt
Teil c) Prinzipiell geeigneter Lösungsansatz	1 Punkt
Erkennen eines geeigneten gleichschenkligen Dreiecks bzw. geeigneter zueinander kongruenter Dreiecke	2 Punkte
Begründung für die Gleichschenkligkeit bzw. der Kongruenz	4 Punkte

Aufgabe 610824	*Insgesamt: 10 Punkte*
Erkennen der nötigen Fallunterscheidung	1 Punkt
Korrekte Lösungsherleitung für den ersten Fall	3 Punkte
Probe für den ersten Fall	1 Punkt
Korrekte Lösungsherleitung für den zweiten Fall	3 Punkte
Probe für den zweiten Fall	1 Punkt
Korrekte Antwort	1 Punkt

Olympiadeklasse **9**

61. Mathematik-Olympiade
2. Runde (Regionalrunde)
Lösungen

610921 Lösung *10 Punkte*

Es sei s die Länge des Arbeitswegs von Niklas in km, v die an normalen Tagen gefahrene Geschwindigkeit in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und t die Gesamtfahrzeit in h.

An normalen Tagen gilt für die Fahrzeit $t = \frac{s}{v}$.

Die Strecke am Dienstag lässt sich in drei Abschnitte unterteilen.

Im ersten Abschnitt mit $s_1 = 0{,}5s$ fährt Niklas mit der Geschwindigkeit $v_1 = 2v$ und braucht damit die Zeit $t_1 = \frac{0{,}5s}{2v} = \frac{s}{4v}$.

Im zweiten Abschnitt mit $s_2 = 0{,}5s - 3$ fährt er mit der üblichen Geschwindigkeit $v_2 = v$ und benötigt die Zeit $t_2 = \frac{0{,}5s-3}{v} = \frac{s-6}{2v}$.

Im letzten Abschnitt mit $s_3 = 3$ fährt er mit der Geschwindigkeit $v_3 = 0{,}5v$ in der Zeit $t_3 = \frac{3}{0{,}5v} = \frac{6}{v}$.

Addieren der Zeiten

$$t_1 + t_2 + t_3 = \frac{s}{4v} + \frac{s-6}{2v} + \frac{6}{v}$$

ergibt $t = \frac{3s+12}{4v}$.

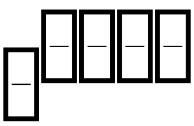
Durch Gleichsetzen erhält man die Gleichung $\frac{3s+12}{4v} = \frac{s}{v}$.

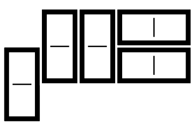
Multiplizieren mit $4v$ führt zu $3s + 12 = 4s$ und damit zu $s = 12$.

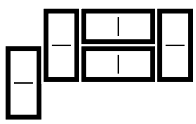
Da die Rechenschritte des Lösungswegs an jeder Stelle eindeutig ausführbar sind, ist dies die einzig mögliche Lösung. Diese Lösung existiert tatsächlich, weil die Terme für die drei Teilzeiten mit $s = 12$ tatsächlich sämtlich nichtnegativ sind. Niklas hat damit einen Arbeitsweg von 12 km.

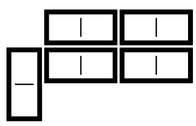
610922 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Siehe Abbildungen L 610922 e–h.

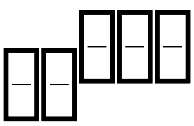

L 610922 e

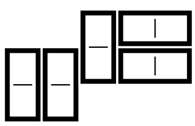

L 610922 f

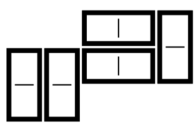

L 610922 g

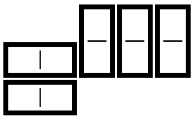

L 610922 h

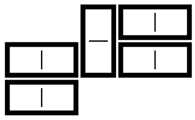
Teil b) Siehe Abbildungen L 610922 i–n.

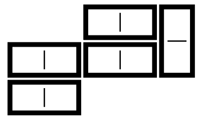

L 610922 i


L 610922 j


L 610922 k

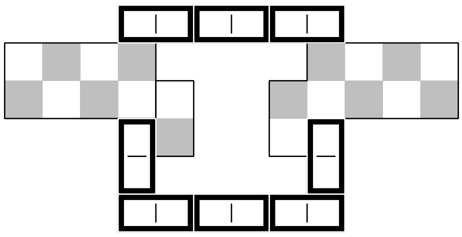

L 610922 l

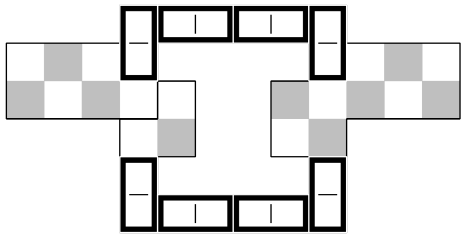

L 610922 m


L 610922 n

Die quadratische Teilfläche kann nur durch zwei senkrechte oder zwei waagerechte Dominosteine überdeckt werden. Die rechteckige Teilfläche kann durch drei senkrechte oder einen senkrechten und zwei waagerechte Dominosteine überdeckt werden. Überdeckt man die beiden schwarzen Felder an der Grenze der beiden Flächen mit einem Dominostein, ist ein Auslegen der Reste nicht mehr möglich. Daraus folgt, dass es nur die gezeigten 2 mal 3, also sechs Möglichkeiten geben kann, die Figur in Abbildung A 610922 c mit Dominosteinen zu überdecken.

Teil c) Siehe Abbildungen L 610922 o–p.


L 610922 o


L 610922 p

Legt man die obere und die untere Reihe in der Abbildung A 610922 d mit drei waagerechten Steinen aus, ergibt sich die in Abbildung L 610922 o dick hervorgehobene Anfangsbelegung. Die beiden voneinander isolierten Restflächen können nach Aufgabenteil a) jeweils auf fünf verschiedene Arten ausgelegt werden, das ergibt insgesamt 25 mögliche Kombinationen der Bedeckung dieser Restflächen.

Legt man in der oberen Reihe und in der unteren Reihe der Figur in Abbildung A 610922 d in die Mitte zwei waagerechte und links und rechts je einen senkrechten Stein, ergibt sich die in Abbildung L 610922 p dick hervorgehobene Anfangsbelegung. Die beiden voneinander isolierten Restflächen können nach Aufgabenteil b) jeweils auf sechs verschiedene Arten ausgelegt werden, das ergibt insgesamt 36 mögliche Kombinationen der Bedeckung dieser Restflächen.

Verwendet man bei der Belegung von oberem und unterem Rand jeweils einmal die Variante mit drei waagerechten Steinen und mit zwei waagerechten zwischen zwei senkrechten Steinen, ist eine regelgerechte Belegung nicht möglich, weil beide Restflächen eine ungerade Anzahl von Feldern hätten.

Insgesamt gibt es also $25 + 36 = 61$ Möglichkeiten, die Figur in Abbildung A 610922 d mit Dominosteinen zu überdecken.

<u>610923 Lösung</u> *10 Punkte*

Als zweistellige Primzahl ist p ungerade und endet nicht auf 5. Aus (2) folgt, dass p weder auf 1 noch auf 9 endet, weil sonst $p - 6$ bzw. $p + 6$ auf 5 enden würden und damit keine zweistelligen Primzahlen wären. Wegen (3) gilt Gleiches für q. Damit gilt zunächst

$$p, q \in \{13, 17, 23, 37, 43, 47, 53, 67, 73, 83, 97\}.$$

Weil $p \cdot q$ höchstens vierstellig werden kann, ist die Quersumme p von $p \cdot q$ maximal 36. Außerdem ist p ungleich 13, denn $13 - 6$ ist nicht zweistellig. Also folgt $p \in \{17, 23\}$.

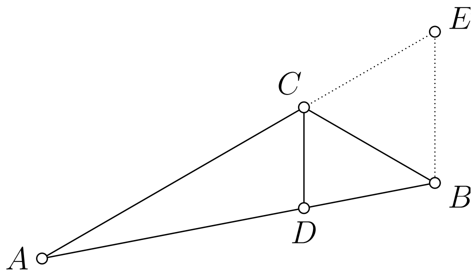
Übrig bleiben wegen (1) und (3) noch 8 mögliche Produkte $p \cdot q$:

$$\begin{aligned}
17 \cdot 37 &= 629 \text{ mit Quersumme } 17\,, \\
17 \cdot 47 &= 799 \text{ mit Quersumme } 25 \neq 17\,, \\
17 \cdot 67 &= 1139 \text{ mit Quersumme } 14 \neq 17\,, \\
17 \cdot 97 &= 1649 \text{ mit Quersumme } 20 \neq 17\,, \\
23 \cdot 43 &= 989 \text{ mit Quersumme } 26 \neq 23\,, \\
23 \cdot 53 &= 1219 \text{ mit Quersumme } 13 \neq 23\,, \\
23 \cdot 73 &= 1679 \text{ mit Quersumme } 23\,, \\
23 \cdot 83 &= 1909 \text{ mit Quersumme } 19 \neq 23\,.
\end{aligned}$$

Die beiden einzigen Lösungspaare (p, q) sind somit $(17, 37)$ und $(23, 73)$.

Lösungsvariante: Weil die Quersumme einer Zahl bei der Division durch 9 den gleichen Rest wie die Zahl selbst lässt, ist 9 ein Teiler von $p \cdot q - p = p\,(q-1)$. Da p als zweistellige Primzahl weder durch 9 noch durch 3 teilbar ist, muss $q-1$ durch 9 teilbar sein. Mit dieser zusätzlichen Überlegung folgt $q \in \{37, 73\}$, womit von den aufgeführten 8 Fällen im oben beschriebenen Lösungsweg nur noch die beiden tatsächlichen Lösungspaare $(17, 37)$ und $(23, 73)$ zu betrachten wären.

610924 Lösung *10 Punkte*



L 610924 a

Die Parallele zur Geraden CD durch B schneide die Gerade AC in E. Wegen der Halbierung des 120°-Winkels in zwei gleich große Teilwinkel gilt $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle DCB| = 60°$, und für $\sphericalangle EBC$ als Wechselwinkel von $\sphericalangle DCB$ gilt dann ebenfalls $|\sphericalangle EBC| = 60°$. Der Winkel $\sphericalangle BCE$ ist Nebenwinkel eines 120°-Winkels, also gilt $|\sphericalangle BCE| = 180° - 120° = 60°$. Somit besitzt das Dreieck CBE zwei Innenwinkel der Größe 60° und ist damit nicht nur gleichschenklig, sondern sogar gleichseitig. Es gilt also $|BC| = |BE|$.

Wir bezeichnen $|BC| = x$. Dann gilt $|AC| = 2x$, $|AE| = 3x$ und $|BE| = x$. Nach dem Strahlensatz ergibt sich

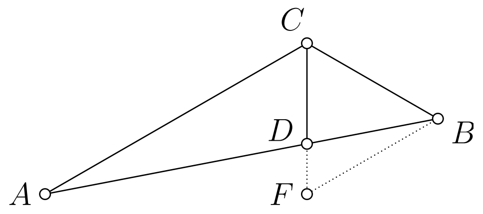
$$|CD| : |BE| = |AC| : |AE|$$

und mit $|BC| = |BE|$ also

$$|CD| : |BC| = 2x : 3x.$$

Umformen nach $|CD|$ führt zu $|CD| = \frac{2}{3}\,|BC|$ wie behauptet.

Lösungsvariante:



L 610924 b

Die Parallele zu AC durch B schneide CD in einem Punkt F außerhalb des Dreiecks ABC. Das Dreieck FBC ist gleichseitig, weil die Innenwinkel $\sphericalangle FCB$ und $\sphericalangle BFC$ als Hälfte des 120°-Winkels bzw. als Wechselwinkel der anderen Hälfte wieder 60° betragen. Es gilt also $|BC| = |CF|$. Die Dreiecke FBD und CAD sind nach dem Hauptähnlichkeitssatz ähnlich, denn die Parallelen AC und FB erzeugen kongruente Wechselwinkel, die Innenwinkel der jeweiligen Dreiecke sind. Da eine Winkelhalbierende die gegenüberliegende Dreiecksseite im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt, gilt $|AD| : |DB| = 2 : 1$. Das ist gleichzeitig das Ähnlichkeitsverhältnis der Dreiecke CAD und FBD. Somit gilt auch $|CD| : |DF| = 2 : 1$, also ist $|CD| = \frac{2}{3}\,|CF| = \frac{2}{3}\,|BC|$.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 610921 — *Insgesamt: 10 Punkte*

Zusammenhang von Weg, Zeit und Geschwindigkeit in den einzelnen Abschnitten je 2 Punkte .... 6 Punkte
Ermitteln des Weges .... 3 Punkte
Beantwortung der Eindeutigkeit .... 1 Punkt

Aufgabe 610922 — *Insgesamt: 10 Punkte*

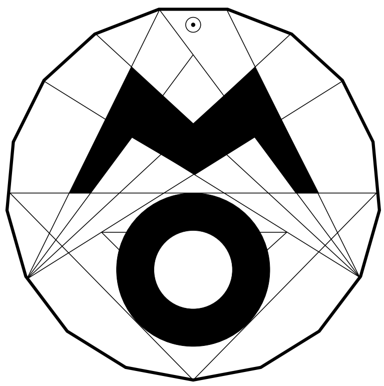
Teil a) Mindestens 3 neue Belegungen .... 1 Punkt
Genau die vier gesuchten neuen Belegungen .... 1 Punkt
Teil b) Angabe der 6 Belegungen .... 2 Punkte
Begründung .... 2 Punkte
Teil c) Herleitung von Teilergebnissen .... 3 Punkte
Richtige Gesamtanzahl .... 1 Punkt

Aufgabe 610923 — *Insgesamt: 10 Punkte*

Erkennen, dass $p, q \in \{13, 17, 23, 37, 43, 47, 53, 67, 73, 83, 97\}$ sein muss .... 4 Punkte
Begründung dass $p \in \{17, 23\}$ .... 2 Punkte
Begründung, dass $q \in \{37, 73\}$ .... 2 Punkte
Untersuchung der möglichen Produkte und Ergebnis .... 2 Punkte

Aufgabe 610924 — *Insgesamt: 10 Punkte*

Finden einer zum Ziel führenden Beweisidee .... 3 Punkte
Beweis .... 7 Punkte

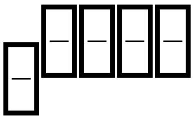


Olympiadeklasse
10

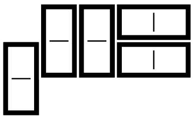
61. Mathematik-Olympiade
2. Runde (Regionalrunde)
Lösungen

611021 Lösung *10 Punkte*

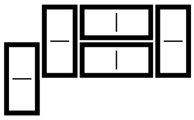
Teil a) Siehe Abbildungen L 611021 f–i.



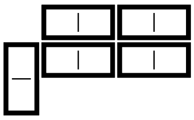
L 611021 f



L 611021 g

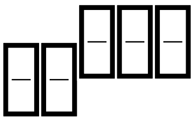


L 611021 h

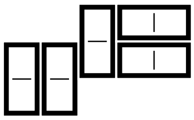


L 611021 i

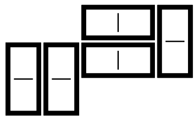
Teil b) Siehe Abbildungen L 611021 j–o.



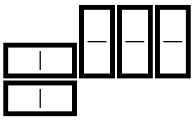
L 611021 j



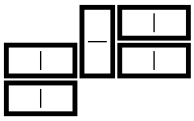
L 611021 k



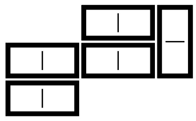
L 611021 l



L 611021 m



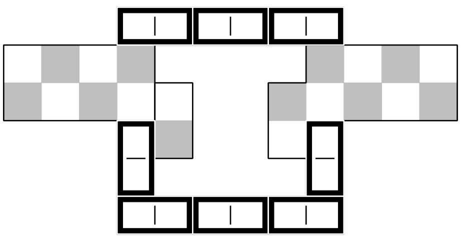
L 611021 n



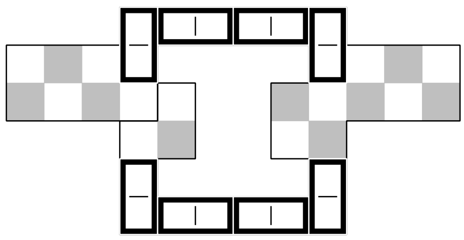
L 611021 o

Die quadratische Teilfläche links kann nur durch zwei senkrechte oder zwei waagerechte Dominosteine ausgelegt werden. Die rechteckige Teilfläche rechts kann nur durch drei senkrechte oder eine senkrechte und zwei waagerechte Dominosteine ausgelegt werden. Überdeckt man die beiden schwarzen Felder an der Grenze der beiden Flächen mit einem Dominostein, ist ein Auslegen der Reste nicht mehr möglich. Daraus folgt, dass es nur die gezeigten 2 mal 3, also sechs Möglichkeiten geben kann, die Figur in Abbildung A 611021 c mit Dominosteinen zu legen.

Teil c) Siehe Abbildungen L 611021 p–q.



L 611021 p



L 611021 q

Legt man die obere und die untere Reihe in der Abbildung A 611021 d mit drei waagerechten Steinen aus, ergibt sich die in Abbildung L 611021 p dick hervorgehobene Anfangsbelegung. Die beiden voneinander isolierten Restflächen können nach Aufgabenteil a) jeweils auf fünf verschiedene Arten ausgelegt werden, das ergibt insgesamt 25 mögliche Kombinationen der Bedeckung dieser Restflächen.

Legt man in der oberen Reihe und in der unteren Reihe der Figur in Abbildung A 611021 d in die Mitte zwei waagerechte und links und rechts je einen senkrechten Stein, ergibt sich die in Abbildung L 611021 q dick hervorgehobene Anfangsbelegung. Die beiden voneinander isolierten Restflächen können nach Aufgabenteil b) jeweils auf sechs verschiedene Arten ausgelegt werden, das ergibt insgesamt 36 mögliche Kombinationen der Bedeckung dieser Restflächen.

Verwendet man bei der Belegung von oberem und unterem Rand jeweils einmal die Variante mit drei waagerechten Steinen und mit zwei waagerechten zwischen zwei senkrechten Steinen, ist eine regelgerechte Belegung nicht möglich, weil beide Restflächen eine ungerade Anzahl von Feldern hätten.

Insgesamt gibt es also $25 + 36 = 61$ Möglichkeiten, die Figur in Abbildung A 611021 d mit Dominosteinen zu überdecken.

Teil d)

Die Figur besteht aus zwei zueinander kongruenten Teilfiguren, die sich einzeln nicht durch Dominosteine auslegen lassen, da sie aus jeweils 19 Feldern bestehen. Ein Stein muss also senkrecht oder waagerecht über beiden Teilfiguren liegen. In beiden Fällen würde dieser Stein zwei weiße Felder überdecken. Es bleiben in jeder Teilfigur dann noch 8 weiße und 10 schwarze Felder übrig. Ein Dominostein müsste also zwei schwarze Felder überdecken. Das ist nicht möglich, da es keine zwei nebeneinanderliegenden schwarzen Felder gibt.

611022 Lösung *10 Punkte*

Weil $p \cdot q$ höchstens vierstellig werden kann, ist die Quersumme p von $p \cdot q$ maximal 36. Also folgt $p \in \{11, 13, 17, 19, 23, 29, 31\}$.

Weil die Quersumme einer Zahl bei der Division durch 9 den gleichen Rest wie die Zahl selbst lässt, ist 9 ein Teiler von $p \cdot q - p = p\,(q - 1)$. Da p als zweistellige Primzahl weder durch 9 noch durch 3 teilbar ist, muss $q - 1$ durch 9 teilbar sein. Also folgt $q \in \{19, 37, 73\}$.

Übrig bleiben wegen (1) fünf mögliche Produkte $p \cdot q$, bei denen wir nun überprüfen, ob auch (2) erfüllt ist:

$$\begin{aligned}
13 \cdot 73 &= 949 \text{ mit Quersumme } \neq 13\,,\\
17 \cdot 37 &= 629 \text{ mit Quersumme } 17\,,\\
19 \cdot 19 &= 361 \text{ mit Quersumme } \neq 19\,,\\
23 \cdot 73 &= 1679 \text{ mit Quersumme } 23\,,\\
29 \cdot 19 &= 551 \text{ mit Quersumme } \neq 29\,.
\end{aligned}$$

Die beiden einzigen Lösungspaare (p, q) sind $(17, 37)$ und $(23, 73)$.

Hinweis: Ohne die Erkenntnis, dass $q-1$ durch 9 teilbar sein muss, sind die folgenden Produkte zu überprüfen.

$$\begin{aligned}
&11\cdot 11,\ 11\cdot 31,\ 11\cdot 41,\ 11\cdot 61,\ 11\cdot 71,\\
&13\cdot 13,\ 13\cdot 23,\ 13\cdot 43,\ 13\cdot 53,\ 13\cdot 73,\ 13\cdot 83,\\
&17\cdot 17,\ 17\cdot 37\ 17\cdot 47,\ 17\cdot 67,\ 17\cdot 97,\\
&19\cdot 19,\ 19\cdot 29,\ 19\cdot 59,\ 19\cdot 79,\ 19\cdot 89,\\
&23\cdot 23,\ 23\cdot 43,\ 23\cdot 53,\ 23\cdot 73,\ 23\cdot 83,\\
&29\cdot 29,\ 29\cdot 59,\ 29\cdot 79,\ 29\cdot 89,\\
&31\cdot 31,\ 31\cdot 41,\ 31\cdot 61,\ 31\cdot 71,\\
&37\cdot 37,\ 37\cdot 47,\ 37\cdot 67,\ 37\cdot 97,\\
&41\cdot 41,\ 41\cdot 61,\ 41\cdot 71,\\
&43\cdot 43,\ 43\cdot 53,\ 43\cdot 73,\ 43\cdot 83,\\
&47\cdot 47,\ 47\cdot 67,\ 47\cdot 97,\\
&53\cdot 53,\ 53\cdot 73,\ 53\cdot 83,\\
&59\cdot 59,\ 59\cdot 79,\ 59\cdot 89,\\
&61\cdot 61,\ 61\cdot 71,\ 67\cdot 97,\ 73\cdot 83,\ 79\cdot 89\,.
\end{aligned}$$

611023 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Da eine Gerade durch zwei ihrer Punkte eindeutig bestimmt ist, genügt der Nachweis, dass die Koordinaten von $B(12,0)$ und $E(7,12)$ die vorgegebene Geradengleichung erfüllen. Es gilt sowohl $0 = -\frac{12}{5}\cdot 12 + \frac{144}{5}$ als auch $12 = -\frac{12}{5}\cdot 7 + \frac{144}{5}$.

Teil b) Betrachtet man im Dreieck DPE die Strecke $\overline{DE}$ als Grundseite mit der Länge 7, muss mit dem vorgegebenen Flächeninhalt der Punkt P den Abstand 8 von der Geraden DE haben und somit die y-Koordinate $12-8=4$ besitzen. Somit hat das Dreieck ABP den Inhalt $0{,}5\cdot 12\cdot 4 = 24$ und das Dreieck BCE den von der Lage des Punktes P unabhängigen Inhalt $0{,}5\cdot 12\cdot 5 = 30$. Flächensubtraktion liefert das Ergebnis $144-28-24-30=62$.

Lösungsvariante: Der Inhalt des Dreiecks APD lässt sich auch direkt berechnen, wenn man die Strecke $\overline{AD}$ als Grundseite mit der Länge 12 betrachtet und die x-Koordinate von P als Maßzahl für die Höhe verwendet. Durch Einsetzen von $y=4$ in $y = -\frac{12}{5}\,x + \frac{144}{5}$ erhält man $x = \frac{31}{3}$ und somit $A = 0{,}5\cdot 12\cdot \frac{31}{3} = 62$.

Teil c) Wegen des stumpfen Winkels bei E kann die Gleichschenkligkeit des Dreiecks DPE nur durch $|DE| = |EP| = 7$ erreicht werden. Nach dem Satz des Pythagoras hat die Strecke $\overline{BE}$ die Länge $\sqrt{12^2+5^2} = 13$ und somit die Strecke $\overline{BP}$ die Länge $13-7=6$. Die y-Koordinate von P ergibt sich durch senkrechte Parallelprojektion von $\overline{BE}$ auf $\overline{BC}$ und ist deshalb nach Strahlensatz $\frac{6}{13}$ von 12, also $\frac{72}{13}$. Für die x-Koordinate von P gilt dann $\frac{72}{13} = -\frac{12}{5}\,x + \frac{144}{5}$, also $x = \frac{126}{13}$. Der Flächeninhalt des Dreiecks APD beträgt nun $A = 0{,}5\cdot 12\cdot \frac{126}{13} = \frac{756}{13}$.

Für $n = 0$ ist $x = y = 0$ eine Lösung. Im Weiteren setzen wir $n \neq 0$ voraus.

Auflösen der ersten Gleichung nach y und anschließendes Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt

$$x^3 + (n - x)^3 = n^2\,,$$

was nach Ausmultiplizieren und Vereinfachen zu

$$n^3 - 3n^2x + 3nx^2 = n^2$$

und damit zu

$$3n \cdot x^2 - 3n^2 \cdot x + n^3 - n^2 = 0$$

führt. Nach Division durch $3n$ erhält man die quadratische Gleichung in x

$$x^2 - nx + \frac{n^2 - n}{3} = 0. \tag{1}$$

Diese Gleichung hat genau dann eine reelle Lösung x, wenn ihre Diskriminante

$$D = \frac{n^2}{4} - \frac{n^2 - n}{3}$$

nichtnegativ ist. Die Ungleichung $D \geq 0$ lässt sich äquivalent umformen zu

$$-n^2 + 4n \geq 0$$

bzw.

$$n(-n + 4) \geq 0,$$

was genau für $0 \leq n \leq 4$ gilt. Damit kann das Gleichungssystem nur für $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ eine reelle Lösung in (x, y) haben.

Für diese Werte gibt es solche Paare (x, y) aber tatsächlich, wie man durch Lösen der quadratischen Gleichung (1) erkennt; man erhält beispielsweise

$$\begin{aligned}
n &= 0 : (x, y) = (0, 0)\,,\\
n &= 1 : (x, y) = (1, 0)\,,\\
n &= 2 : (x, y) = \left(1 + \tfrac{1}{\sqrt{3}}, 1 - \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\,,\\
n &= 3 : (x, y) = (2, 1)\,,\\
n &= 4 : (x, y) = (2, 2)\,.
\end{aligned}$$

Die jeweilige Probe bestätigt, dass dies tatsächlich Lösungen des Gleichungssystems sind.

$$\begin{aligned}
n &= 0 : 0 + 0 = 0 \text{ und } 0^3 + 0^3 = 0^2\,,\\
n &= 1 : 1 + 0 = 1 \text{ und } 1^3 + 0^3 = 1^2\,,\\
n &= 3 : 2 + 1 = 3 \text{ und } 2^3 + 1^3 = 3^2\,,\\
n &= 4 : 2 + 2 = 4 \text{ und } 2^3 + 2^3 = 4^2\,.
\end{aligned}$$

Für $n = 2$ ergibt sich

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2$$

sowie

$$
\begin{aligned}
&\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3+\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3\\
&=1+3\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+3\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3+1-3\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+3\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3\\
&=1+\frac{3}{3}+1+\frac{3}{3}=2^2.
\end{aligned}
$$

Anmerkung: Für die Lösung der Aufgabe reicht die Angabe von Lösungen (x, y) für die verschiedenen n aus.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 611021 *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a)	Mindestens 3 neue Belegungen	1 Punkt
	Genau die vier gesuchten neuen Belegungen	1 Punkt
Teil b)	Angabe der 6 Belegungen	1 Punkt
	Begründung	2 Punkte
Teil c)	Richtiges Ergebnis	1 Punkt
	Herleitung	2 Punkte
Teil d)	Herleitung	2 Punkte

Aufgabe 611022 *Insgesamt: 10 Punkte*

Erkennen, dass $p \in \{11, 13, 17, 19, 23, 29, 31\}$ sein muss	4 Punkte
Begründung, dass $q - 1$ durch 9 teilbar sein muss oder Ausschluss der unmöglichen Werte von q durch Untersuchung aller Möglichkeiten	2 Punkte
Untersuchung der möglichen Produkte und Ergebnis	4 Punkte

Aufgabe 611023 *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a)	2 Punkte
Teil b)	4 Punkte
Teil c)	4 Punkte

Aufgabe 611024 *Insgesamt: 10 Punkte*

Finden einer quadratischen Gleichung	3 Punkte
Untersuchung der Diskriminante – Bestimmung der Werte für n	4 Punkte
Angabe von zugehörigen Lösungspaaren (x, y)	3 Punkte

611221 Lösung *10 Punkte*

Angenommen, es gibt Zahlen x und y, die den Bedingungen der Aufgabenstellung genügen. Dann ist sicher

$$a > 0\,, \tag{4}$$

da es sich voraussetzungsgemäß bei x und y um zweistellige Zahlen handelt.

Weiterhin gelten $x = 10\,a + b$ und $y = 10\,a + c$, also $x + y = 20\,a + (b + c)$. Nach Voraussetzung (2) kann somit $b + c$ nur gleich 0 oder gleich 10 sein.

Der Fall $b + c = 0$ kann dabei nicht eintreten. Es wäre dann nämlich $b = c = 0$ und damit nach Voraussetzung (1) auch $a = c - b = 0$ im Widerspruch zu (4). Also ist notwendigerweise

$$b + c = 10\,. \tag{5}$$

Wegen (4) und (1) gilt schließlich $b < a + b = c$. Da nach Formel (5) außerdem der Zusammenhang $c = 10 - b$ besteht, folgt hieraus $b < 10 - b$, also $2\,b < 10$ und $b < 5$. Andererseits ist $b > 0$, da $b = 0$ nach (5) zu $c = 10$ führen würde, was aber keine Ziffer ist. Damit muss b eine der Ziffern 1, 2, 3 oder 4 sein.

Um diese Möglichkeiten weiter einzuschränken, betrachten wir die Reste der Zahlen bei Division durch 3. Da die Quersumme einer Zahl dabei denselben Rest hat wie die Zahl selbst, muss wegen (3) der Rest von xy gleich 2 sein.

Aus (1) und (4) folgt nun zunächst $a = c - b = 10 - 2\,b$ und weiter $y = 10\,a + c = 110 - 21\,b$. Folglich lässt y bei Division durch 3 stets den Rest 2. Damit auch xy den Rest 2 hat, muss der Rest von $x = 10\,a + b = 10\,(10 - 2\,b) + b = 100 - 19\,b$ gleich 1 sein. Dies gilt nur, wenn $19\,b$ und damit auch b selbst durch 3 teilbar ist. Von den oben genannten Ziffern besitzt nur $b = 3$ diese Eigenschaft. Die Ziffern a und c müssen dann die Werte $a = 4$ und $c = 7$ haben.

Eine Probe zeigt, dass für $a = 4$, $b = 3$ und $c = 7$ die Eigenschaften (1), (2) und (3) erfüllt sind. Daher sind die Zahlen x und y tatsächlich eindeutig bestimmt mit den Werten $x = 43$ und $y = 47$. Schließlich ist $xy = 2021$ das gesuchte Produkt.

Lösungsvariante:

Anstelle der Teilbarkeitsüberlegungen führt auch eine systematische Untersuchung aller Möglichkeiten für die Wahl von b zum Ziel. Diese sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst.

b	$c = 10 - b$	$a = c - b$	$x = \overline{ab}$	$y = \overline{ac}$	xy
1	9	8	81	89	7209
2	8	6	62	68	4216
3	7	4	43	47	2021
4	6	2	24	26	624

Von den vier Einträgen der rechten Spalte hat nur die Zahl $xy = 43 \cdot 47 = 2021$ die Quersumme 5.

Bemerkung: Die etwas naheliegendere Betrachtung der Reste bei Division durch 9 führt ebenfalls zum Ziel.

Bemerkung: Die Möglichkeit $b = c = 0$ kann auch dadurch ausgeschlossen werden, dass festgestellt wird, dass $xy = \overline{ab} \cdot \overline{ac} = \overline{a0}^2$ dann eine Quadratzahl wäre. Quadratzahlen lassen jedoch bei Division durch 3 immer einen der Reste 0 oder 1, während Zahlen mit der Quersumme 5 den Rest 2 lassen.

611222 Lösung *10 Punkte*

Um eine Lösungsidee zu finden, werden einige kleine Zahlen ausprobiert.

Wenn $n = 1$ ist, gibt es eine Kerze, die an einem Wochenende einmal angezündet wird. Die Bedingungen sind erfüllt.

Wenn $n = 2$ ist, wird am ersten Wochenende eine Kerze angezündet. Am zweiten Wochenende müssen beide Kerzen angezündet werden. Dann ist eine Kerze nur einmal, die andere aber zweimal angezündet worden. Die Bedingungen sind nicht erfüllbar.

Wenn $n = 3$ ist, kann eine Kerze am ersten Wochenende, die beiden anderen am zweiten und alle am dritten angezündet werden. Damit sind die Bedingungen erfüllt, denn jede Kerze wird zweimal angezündet.

Wenn $n = 4$ ist, müssen insgesamt $1 + 2 + 3 + 4 = 10$-mal Kerzen angezündet werden. Es ist nicht möglich, dass jede Kerze gleich oft angezündet wird, da 10 nicht durch 4, die Anzahl der Kerzen, teilbar ist. Die Bedingungen sind somit nicht erfüllbar.

Wenn $n = 5$ ist, kann man in der durch die Tabelle dargestellten Reihenfolge vorgehen.

	Kerze 1	Kerze 2	Kerze 3	Kerze 4	Kerze 5
Woche 1	$\times$				
Woche 2		$\times$	$\times$		
Woche 3	$\times$			$\times$	$\times$
Woche 4		$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
Woche 5	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$

Diese Reihenfolge findet man z. B., wenn man die Regel „Zünde die Kerzen an, die bisher am wenigsten benutzt worden sind“ probiert. Jede Kerze wird dreimal angezündet, die Bedingungen sind somit erfüllbar.

Aus diesen Beispielen kann man die Vermutung gewinnen, dass die Bedingungen für das Anzünden der Kerzen genau dann erfüllbar sind, wenn n eine ungerade Zahl ist. Diese Vermutung wird im Folgenden nachgewiesen.

Zunächst wird gezeigt, dass die Bedingungen nur dann erfüllt werden können, wenn n ungerade ist.

Insgesamt wird genau

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Mal eine Kerze angezündet. Jede der n Kerzen muss also

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

Mal angezündet werden. Somit muss $(n+1)/2$ eine ganze Zahl und folglich n eine ungerade Zahl sein.

Als zweites wird nachgewiesen, dass man bei jeder ungeraden Zahl n von Kerzen und Wochenenden die Bedingungen erfüllen kann.

Wenn n ungerade ist, ist $m = (n-1)/2$ eine ganze Zahl. Man kann dann folgendermaßen vorgehen.

– Für $1 \le k \le m$ zündet man am k-ten Wochenende beliebige k Kerzen an.
– Für $m+1 \le k \le 2m$ zündet man am k-ten Wochenende genau die k Kerzen an, die am $(n-k)$-ten Wochenende nicht angezündet wurden.
– Am n-ten Wochenende zündet man alle n Kerzen an.

Man beachte hierbei, dass wegen $n = 2m+1$ die Bedingung $m+1 \le k \le 2m$ genau dann erfüllt ist, wenn $1 \le n-k \le m$ gilt, sodass jeder Fall im zweiten Punkt auf genau ein Wochenende aus dem ersten Punkt Bezug nimmt. Jede Kerze wird damit an jedem der m Wochenend-Paare

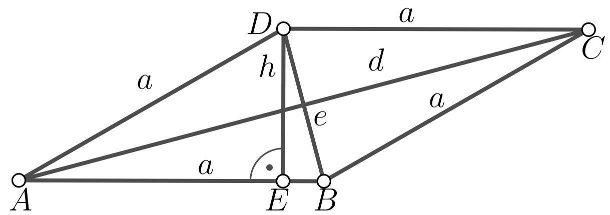
$$(1, n-1)\,, \quad (2, n-2)\,, \quad \ldots\,, \quad (m, n-m)$$

genau einmal angezündet. Wegen $n - m = m + 1$ fehlt dann nur noch das letzte Wochenende, an dem alle Kerzen noch einmal angezündet werden.

Insgesamt brennt jede Kerze also genau $m + 1 = (n+1)/2$-mal, wie behauptet.

611223 Lösung *10 Punkte*

Erste Lösung:



L 611223 a

Bezeichnet a die Länge der Seiten des Rhombus R und sind d und e die Längen seiner Diagonalen, so gilt nach Voraussetzung

$$a^2 = d \cdot e\,.$$

Weil die Diagonalen in einem Rhombus aufeinander senkrecht stehen und einander halbieren, wird die Rhombusfläche in vier kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt, vgl. Abbildung L 611223 a. Somit gilt für den Flächeninhalt von R

$$\mathrm{A}_R = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{e}{2} = \frac{d \cdot e}{2} = \frac{a^2}{2}\,. \tag{1}$$

Andererseits zerlegt die Diagonale $\overline{BD}$ die Rhombusfläche in zwei kongruente Dreiecke ABD und BCD. Die Länge einer Seite dieser Dreiecke ist $a = |AB|$. Die zu AB senkrechte Dreieckshöhe $\overline{DE}$ habe die Länge h. Dann gilt

$$\mathrm{A}_R = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = a \cdot h\,. \tag{2}$$

Durch Gleichsetzen der rechten Seiten von (1) und (2) folgt $a^2 = 2 \cdot a \cdot h$, also ist $h = a/2$. Ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit werde angenommen, dass der Punkt E auf der Strecke $\overline{AB}$ liegt. Das Dreieck AED hat einen rechten Winkel bei E, seine Hypotenuse $\overline{AD}$ hat die Länge a, und die Länge der Kathete $\overline{DE}$ ist $h = a/2$. Das Dreieck AED ist also ein halbes gleichseitiges Dreieck. Somit hat der Innenwinkel von R bei A die Größe $|\sphericalangle EAD| = 30°$. Der Winkel bei C beträgt dann ebenfalls $30°$, und die beiden anderen Winkel von R haben die Größe $180° - 30° = 150°$. Das zu bestimmende Verhältnis der Innenwinkel ist somit $1 : 5$ (beziehungsweise $5 : 1$).

Zweite Lösung: Aus den Eigenschaften eines Rhombus und den Voraussetzungen folgt mit dem Satz des Pythagoras unter Verwendung der Bezeichnungen aus der 1. Lösung

$$d \cdot e = a^2 = \frac{1}{4}(d^2 + e^2)\,.$$

Daraus erhält man die Gleichung $d^2 - 4 \cdot d \cdot e + e^2 = 0$ mit den Lösungen $d_{1,2} = (2 \pm \sqrt{3})e$. Nehmen wir ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit $d \geq e$ an, so folgt für den einen halben Rhombuswinkel

$$\tan|\sphericalangle BAC| = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}\,.$$

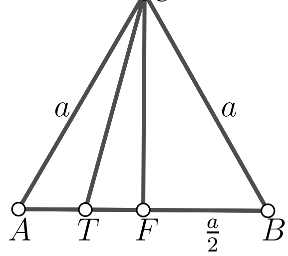
Um zu zeigen, dass $|\sphericalangle BAC| = 15°$ gilt, verwenden wir die Halbwinkelformel der Tangensfunktion mit $\alpha = 30°$,

$$\begin{aligned}(\tan 15°)^2 &= \left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\sqrt{3}/2}{1+\sqrt{3}/2} = \frac{\left(1-\sqrt{3}/2\right)^2}{\left(1+\sqrt{3}/2\right)\left(1-\sqrt{3}/2\right)}\\ &= \frac{\left(1-\sqrt{3}/2\right)^2}{1-3/4} = \left(2-\sqrt{3}\right)^2.\end{aligned}$$

Wegen $\tan 15° > 0$ ergibt sich das gewünschte Resultat durch Wurzelziehen. Somit ist $|\sphericalangle BAC| = 15°$, also $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle DCB| = 30°$, woraus $|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle ADC| = 150°$ folgt.

Lösungsvariante:

Dass $\tan 15° = 2 - \sqrt{3}$ ist, ergibt sich auch aus der Betrachtung eines halben gleichseitigen Dreiecks und der Winkelhalbierenden des $30°$-Winkels.



L 611223 b

Aufgrund des Satzes von der Winkelhalbierenden gilt im gleichseitigen Dreieck ABC mit der Seitenlänge a (Abbildung L 611223 b)

$$\frac{|AT|}{|TF|} = \frac{\frac{a}{2} - |TF|}{|TF|} = \frac{|AC|}{|FC|} = \frac{a}{\frac{a}{2}\sqrt{3}}\,.$$

Daraus folgt

$$|TF| = \frac{\frac{a}{4}\sqrt{3}}{1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}}$$

und

$$\tan 15^\circ = \tfrac{|TF|}{|CF|} = \tfrac{\frac{a}{4}\sqrt{3}}{1+\frac{1}{2}\sqrt{3}} : \tfrac{a}{2}\sqrt{3} = \tfrac{1}{2+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}\,.$$

611224 Lösung *10 Punkte*

Erste Lösung: Wegen $a > b \geq 0$ gilt $0 < a - b \leq a$, also $0 < (a-b)^3 \leq a^3$, und damit $1/(a-b)^3 \geq 1/a^3$ sowie

$$\frac{4}{(a-b)^3} \geq \frac{4}{a^3}\,. \tag{1}$$

Dabei tritt die Gleichheit genau für $b = 0$ ein.

Zum Beweis der Ungleichung reicht es also, für $a > 0$ nachzuweisen, dass

$$3a + \frac{4}{a^3} \geq 4\sqrt{2} \tag{2}$$

gilt. Wegen $a > 0$ ist dies äquivalent zu

$$3a^4 - 4\sqrt{2}a^3 + 4 \geq 0\,. \tag{3}$$

Der Term auf der linken Seite von (3) lässt sich nun wie folgt faktorisieren:

$$3a^4 - 4\sqrt{2}a^3 + 4 = (a - \sqrt{2})(3a^3 - \sqrt{2}a^2 - 2a - 2\sqrt{2}) = (a - \sqrt{2})^2(3a^2 + 2\sqrt{2}a + 2)\,.$$

Dabei ist der rechte Faktor für $a > 0$ immer positiv, und es gilt $(a - \sqrt{2})^2 \geq 0$, sodass Ungleichung (3) gezeigt ist.

Gleichheit tritt dabei genau für $a = \sqrt{2}$ ein. Zusammen mit der obigen Feststellung zur Gleichheit in (1) ergibt sich die Gleichheit in der Aufgabenstellung genau für $a = \sqrt{2}$ und $b = 0$.

Zweite Lösung: Der Term aus der Aufgabenstellung wird umgeformt und dann die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel von vier nichtnegativen Zahlen angewandt. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
3a + \frac{4}{(a-b)^3} &= (a-b) + (a-b) + (a-b) + \frac{4}{(a-b)^3} + 3b \\
&\geq 4\sqrt[4]{(a-b)^3\frac{4}{(a-b)^3}} + 3b \qquad (4)\\
&= 4\sqrt{2} + 3b \\
&\geq 4\sqrt{2}\,. \qquad (5)
\end{aligned}$$

Damit ist die behauptete Ungleichung gezeigt.

Zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel besteht bekanntlich Gleichheit genau dann, wenn alle beteiligten Zahlen untereinander gleich sind. In Ungleichung (4) gilt Gleichheit deshalb genau bei $a-b=4/(a-b)^3$, also für $a-b=\sqrt{2}$. In der zweiten Ungleichung (5) tritt Gleichheit nur für $b=0$ ein. Insgesamt wird also genau für $a=\sqrt{2}$ und $b=0$ Gleichheit angenommen.

Lösungsvariante:

1. In der ersten Lösung kann man Ungleichung (2) oder (3) auch mithilfe der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel von vier nichtnegativen Zahlen erhalten,

$$3a+\frac{4}{a^3}=a+a+a+\frac{4}{a^3}\geq 4\sqrt[4]{a^3\cdot\frac{4}{a^3}}=4\sqrt{2}$$

bzw.

$$3a^4+4=a^4+a^4+a^4+4\geq 4\sqrt[4]{a^{12}\cdot 4}=4\sqrt{2}a^3\,.$$

Gleichheit tritt wiederum genau dann ein, wenn die vier Zahlen allesamt gleich sind, also bei $a=4/a^3$ bzw. $a^4=4$, was jeweils zu $a=\sqrt{2}$ äquivalent ist.

2. Des Weiteren kann man die Ungleichungen (2) und (3) auch mithilfe der Differentialrechnung begründen. Die für alle $a>0$ definierte Funktion

$$f_1(a)=3a+\frac{4}{a^3}$$

hat die Ableitung

$$f_1'(a)=3-\frac{12}{a^4}\,,$$

die für $a<\sqrt{2}$ negativ und für $a>\sqrt{2}$ positiv ist. Demnach ist die Ausgangsfunktion f_1 in diesen Intervallen jeweils streng monoton fallend bzw. streng monoton wachsend. Folglich ist $a=\sqrt{2}$ die einzige Minimalstelle von f_1, und (2) ist erfüllt.

Ebenso hat die für alle $a>0$ definierte Funktion

$$f_2(a)=3a^4-4\sqrt{2}a^3+4$$

die Ableitung

$$f_2'(a)=12a^3-12\sqrt{2}a^2=12(a-\sqrt{2})a^2\,,$$

die ebenfalls für $a<\sqrt{2}$ negativ und für $a>\sqrt{2}$ positiv ist. Es folgt Ungleichung (3) mit Gleichheit genau für $a=\sqrt{2}$.

3. Die Substitution $a=x\sqrt{2}$ überführt die Ungleichungen (2) und (3) in $3x+1/x^3\geq 4$ bzw. $3x^4-4x^3+1\geq 0$. Die Rechenschritte in der ersten Lösung und ihren Varianten vereinfachen sich dadurch etwas. Zum Beispiel hat man die Faktorisierung

$$3x^4-4x^3+1=(x-1)(3x^3-x^2-x-1)=(x-1)^2(3x^2+2x+1)\,.$$

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 611221 — *Insgesamt: 10 Punkte*

Herleitung von Zusammenhängen zur Reduktion auf eine unbekannte Ziffer .... 3 Punkte
Ausschluss von $c = 0$ .... 1 Punkt
Einschränkung des Bereichs von b .... 2 Punkte
Begründung für $b = 3$ .... 2 Punkte
Bestimmung der Zahlen x und y und ihres Produkts .... 2 Punkte

Aufgabe 611222 — *Insgesamt: 10 Punkte*

Finden der richtigen Antwort (als begründete Vermutung) .... 2 Punkte
Ausschluss der geraden Zahlen .... 4 Punkte
Angabe einer Lösung für ungerade Anzahlen .... 4 Punkte

Aufgabe 611223 — *Insgesamt: 10 Punkte*

Herleitung einer algebraischen Identität zwischen Längen .... 5 Punkte
Schluss auf die Winkelgrößen .... 5 Punkte

Aufgabe 611224 — *Insgesamt: 10 Punkte*

Beweis der Ungleichung .... 8 Punkte

Bei Vorgehen im Sinne der ersten Lösung:
Reduktion auf (2) oder dazu äquivalente Ungleichung 2 Punkte
Nachweis dieser Ungleichung 6 Punkte

Diskussion des Gleichheitsfalls .... 2 Punkte

Bei Vorgehen im Sinne der ersten Lösung:
Gleichheitsfall in (1) 1 Punkt
Gleichheitsfall in (2) bzw. dazu äquivalenter Ungleichung 1 Punkt