Übung 9

Bei einigen Aufgaben werden die Inhalte der Vorlesung vom Montag benötigt.

Aufgabe 1 [hierbei handelt es sich um eine alte Klausuraufgabe]
Sei $M := \{1, 2, 3\}$ eine dreielementige Menge. Sei $\mathcal{F} := \{f \mid f : M \to M, f \text{ ist nicht bijektiv}\}$.

a) Man gebe eine Funktion $f \in \mathcal{F}$ an.

b) Sei wie üblich $\circ$ die Nacheinanderausführung von Funktionen. Man bestimme eine Funktion $g \in \mathcal{F}$ mit $g \circ g = g$.

c) Man gebe zwei verschiedene Funktionen $e, h \in \mathcal{F}$ an und fülle die folgende Verknüpfungstabelle begründet so aus, dass das Paar $(\{e, h\}, \circ)$ eine Gruppe ist.

$\circ$	e	h
e		
h		

Aufgabe 2
Es seien die beiden folgenden Verknüpfungstafeln auf der Menge $M := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ gegeben:

$\circ$	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	1	4	5	3
3	3	4	5	2	1
4	4	5	1	3	2
5	5	3	2	1	4

$*$	1	2	3	4	5
1	4	3	1	5	2
2	3	5	2	1	4
3	1	2	3	4	5
4	5	1	4	2	3
5	2	4	5	3	1

Man beweise, dass *genau eine* der beiden Verknüpfungsstrukturen $(M, \circ), (M, *)$ eine Gruppe ist.

Aufgabe 3
Seien folgende Funktionen f_i mit $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ auf der Menge $\mathbb{Q}\backslash\{0, 1\}$ definiert

$$f_1(x) := x \qquad f_3(x) := \frac{1}{x} \qquad f_5(x) := \frac{1}{1-x}$$

$$f_2(x) := 1 - x \qquad f_4(x) := \frac{x-1}{x} \qquad f_6(x) := \frac{x}{x-1}$$

a) Man überlege sich, dass alle f_i Permutationen auf $\mathbb{Q}\backslash\{0, 1\}$ sind. (nicht schriftlicht!)

b) Sei $F := \{f_i \mid f_i : \mathbb{Q}\backslash\{0, 1\} \to \mathbb{Q}\backslash\{0, 1\}, i \in \{1, 2, \ldots, 6\}\}$.
Man beweise, dass das Verknüpfungspaar $(F, \circ)$ mit der üblichen Hintereinanderausführung $\circ$ eine nicht-abelsche Gruppe ist, das Paar erfüllt also die Eigenschaften $(G1)$ bis $(G3)$, nicht aber $(G4)$.

AUFGABE 4

Für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ sei für eine Verknüpfung $*$ auf $\mathbb{Q}$ definiert:

$$a * b := \begin{cases} \dfrac{a \cdot b}{a+b}\,, & \text{für } a \neq 0,\ b \neq 0,\ a+b \neq 0 \\ \\ a+b\,, & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Man berechne $0 * 0$, $1 * (-1)$, $0 * \frac{1}{2}$, $(-\frac{2}{3}) * \frac{3}{4}$ - offenbar ist $*$ damit nicht injektiv... ist $*$ überhaupt eine Funktion, also eine vernünftige Verknüpfung auf $\mathbb{Q}$ [eine Verknüpfung heiße vernünftig, wenn sie nicht unvernünftig ist]?

b) Man zeige: $\exists e \in \mathbb{Q}\ \ \forall q \in \mathbb{Q}\ :\ e * q = q * e = q$

c) Man zeige: $\forall q \in \mathbb{Q}\ \ \exists q' \in \mathbb{Q}\ :\ q * q' = q' * q = e$

d) Man zeige: $\forall p, q \in \mathbb{Q}\ :\ q * q' = q' * q$

Damit ist $(\mathbb{Q}, *)$ schon fast eine kommutative Gruppe, für den Nachweis der Assoziativität schaue man sich den Hinweis unten an. In Gruppen lassen sich zum Beispiel schöne Gleichungen lösen, hier gibt es eine:

e) Man bestimme die Lösungen der Gleichung $x * x * 3 = \dfrac{3}{4}$ in $(\mathbb{Q}, *)$

Hinweis. Tatsächlich ist $(\mathbb{Q}, *)$ eine kommutative Gruppe, allerdings ist der Nachweis der Assoziativität etwas lästig. Wenn sich trotzdem jemand dafür interessiert, hier eine Beweisskizze:
Sei f eine Abbildung von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{Q}$, die für alle $x \in \mathbb{Q}$ folgendermaßen definiert ist:

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{x}\,, & \text{für } x \neq 0 \\ \\ 0\,, & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Dann gilt für alle $a, b \in \mathbb{Q} : a * b = f(f(a) + f(b))$. Beweis für den Hauptfall $(a, b, a+b \neq 0)$:

$$f(f(a)+f(b)) = \frac{1}{f(a)+f(b)} = \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{1}{\frac{b+a}{a \cdot b}} = \frac{a \cdot b}{a+b} = a * b$$

Damit folgt nun leicht die Assoziativität der Gruppe $(\mathbb{Q}, *)$, schauen Sie:

$$a*(b*c) = f(f(a)+f(b*c)) = f(f(a)+f(f(f(b)+f(c)))) = f(f(a)+f\left(\frac{1}{f(b)+f(c)}\right) = f(f(a)+f(b)+f(c)).$$

Ebenso erhält man: $(a * b) * c = f(f(a) + f(b) + f(c))$.