ÜBUNG 8

AUFGABE 1

In der letzten Vorlesung wurden die beiden folgenden Sätze thematisiert.

Satz 0.1. *Sei A, B nichtleere Mengen und $B \subseteq A$. Wenn es eine injektive Funktion von A in B gibt, dann gibt es auch eine bijektive Funktion von A auf B.*

Satz 0.2 (SCHRÖDER-BERNSTEIN-THEOREM)**.** *Seien A, B nichtleere Mengen. Wenn $|A| \leq |B|$ und $|B| \leq |A|$, dann gilt $|A| = |B|$.*

Unten ist eine Kurzform des Beweises vom SCHRÖDER-BERNSTEIN-THEOREM (hatten wir auch schon in der Vorlesung besprochen), allerdings ist sie ein wenig „durcheinander geraten“. Man ordne (und vervollständige) die Kurzform und formuliere einen schönen Beweistext.

daher gilt $\lvert A\rvert = \lvert B\rvert$

$g_1^{-1} : W(g) \to B$ ist bijektiv

ex. injektive Funktionen f,g mit $f : A \to B, g : B \to A$

$g_1 : B \to W(g)$ definiert $g_1(x) = g(x)$ für alle $x \in B$ ist bijektiv

daher ist $g_1^{-1} \circ h : A \to B$ eine bijektive Funktion

$h : A \to W(g)$ und $g_1^{-1} : W(g) \to B$ sind bijektive Funktionen

da $W(g) \subseteq A$, ex eine bijektive Funktion $h : A \to W(g)$

$g_1 \circ f : A \to W(g)$ ist injektiv

AUFGABE 2

Man zeige mit Hilfe von Satz 0.2 die Gleichmächtigkeit der Mengen $(0, 1)$ und $[0, 1]$, also die Gleichmächtigkeit des offenen Intervalls $(0, 1)$ und des geschlossenen Intervalls $[0, 1]$.

Aufgabe 3

Bei einer endlichen Trägermenge eines Verknüpfungspaares lässt sich die auf der Menge definierte Verknüpfung übersichtlich in Form einer Tabelle darstellen. So wird zum Beispiel auf der Menge $S = \{x, y, z\}$ folgende Verknüpfung $*$ definiert:

*	x	y	z
x	y	z	y
y	y	x	x
z	z	z	y

Man berechne

a) $x^2 := x * x$ und entsprechend $(x * z)^2$, $(y * z)^5$

b) $x * (y * z)$ und $(x * y) * z$

c) $x * (y * x)$ und $(x * y) * x$

d) $y * (y * y)$ und $(y * y) * y$

Aufgabe 4

Sei S' eine Menge. Seien a, b Elemente der jeweils in (i) bis (vi) angegebenen Menge S und $* : S \times S \to S'$. Wir schreiben für $*((a, b)) = c$ kurz $a * b = c$.

(a) Welche der unten angegebenen Funktionen sind binäre Operationen, also Verknüpfungen auf S, d.h. Funktionen von $S \times S \to S$?

(i) $a * b := 1$ auf der Menge $S = \mathbb{Z}$

(ii) $a * b := \frac{a}{b}$ auf der Menge $S = \mathbb{N}$

(iii) $a * b := a^b$ auf der Menge $S = \mathbb{N}$

(iv) $a * b := max\{a, b\}$ auf der Menge $S = \mathbb{N}$

(v) $a * b := ab - a - b + 2$ auf der Menge $S = \mathbb{R} \backslash \{1\}$

(vi) $a * b := \sqrt{ab}$ auf der Menge $S = \mathbb{Q}_{>0}$

Aufgabe 5

Man bestimme die Lösungsmenge der folgenden reellen Gleichungen durch Äquivalenzumformungen.

a) $\sqrt{3x} - (x + 1) = 2 + 5x$

b) $\sqrt{3(x + 1)} - \sqrt{x + 2} = 5x$