ÜBUNG 7

AUFGABE 1

Sei f eine Relation auf $\mathbb{R}$ definiert durch $f := \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y = x$ oder $y = -x\}$ und sei g die bekannte reelle Funktion g definiert durch $g(x) := x^2$.

(i) Man beweise, dass f keine Funktion auf $\mathbb{R}$ ist.

(ii) Man beweise, dass $g \circ f$ eine Funktion auf $\mathbb{R}$ ist.

(iii) Ist auch die Verkettung $h \circ f$ mit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) := x^3$ eine Funktion auf $\mathbb{R}$?

AUFGABE 2

Man zeige, dass die Menge $(0, 2) := \{x \mid x \in \mathbb{R}, 0 < x < 2\}$ gleichmächtig zur Menge der reellen Zahlen ist, d.h. es gilt

$$|(0, 2)| = |\mathbb{R}|,$$

indem man den in der Vorlesung getätigten Beweis für $|(0, 1)| = |\mathbb{R}|$ umschreibt.

Hinweis. Für den Beweis kann man die reelle Funktion f definiert durch $f : (0, 2) \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) := \frac{1-x}{x\cdot(x-2)}$ verwenden.

AUFGABE 3

Wir definieren für jede reelle Zahl r eine Abrundungsfunktion $\lfloor . \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ durch

$$r \mapsto \lfloor r \rfloor := max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq r\}$$

a) Man zeige, dass $\lfloor . \rfloor$ surjektiv, aber nicht injektiv ist.

b) Sei f eine Funktion von der Menge der natürlichen Zahlen in die Menge der ganzen Zahlen, definiert durch

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}\ ,\ n \mapsto f(n) := (-1)^n \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

Man zeige, dass dann f eine Bijektion ist. Was bedeutet dies inhaltlich?

AUFGABE 4

Man beweise

(i) Seien A, B disjunkte und abzählbare Mengen, dann ist auch deren Vereinigung $A \cup B$ eine abzählbare Menge.

(ii) Die Menge der irrationalen Zahlen, also die Menge $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ist nicht abzählbar.

(iii) Sei A eine abzählbare Menge und $B = \{0, 1\}$. Dann ist auch $A \times B$ abzählbar.

(iiii) Die Menge aller 2-elementigen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist abzählbar.