ÜBUNG 3

AUFGABE 1
Man bestimme

a) $[123] + [456] + [8790]$ in $\mathbb{Z}_8$

b) $[3] \cdot [4] \cdot [5]$ in $\mathbb{Z}_3$, in $\mathbb{Z}_4$, in $\mathbb{Z}_5$ und in $\mathbb{Z}_6$

c) $[4]^3$ in $\mathbb{Z}_5$

d) $[7]^6$ in $\mathbb{Z}_{10}$

Wir betrachten die Restklassenmenge $\mathbb{Z}_n := \{[0], [1], \ldots, [n-1]\}$ mit $n \in \mathbb{N}$.
Seien $[a], [b], [c], [d] \in \mathbb{Z}_n$. Man beweise oder widerlege

e) $[a] \cap [b] = \emptyset \;\Leftrightarrow a \equiv b$

f) Aus $c \in [a], d \in [b]$ und $[a] \neq [b]$ folgt $c \not\equiv d$

AUFGABE 2
Wir kennen den bekannten Satz

> *Ein Produkt zweier (reeller) Zahlen ist genau dann null, wenn (mindestens) ein Faktor gleich null ist.*

a) Seien $[a], [b] \in \mathbb{Z}_8$. Gilt die Aussage: Wenn $[a] \cdot [b] = [0]$ gilt, dann folgt $[a] = [0]$ oder $[b] = [0]$?

b) Wie ist die Antwort der Frage in (a) wenn statt $\mathbb{Z}_8$ die Menge $\mathbb{Z}_9$ (die Menge $\mathbb{Z}_{10}$, die Menge $\mathbb{Z}_{11}$) genommen wird?

c) Bilden Sie eine Vermutung für welche natürliche Zahlen n die Antwort der Frage in (a) JA lautet.

AUFGABE 3
Für jede der unten angegebenen Partitionen P_i der Menge $A := \{a, b, c, d, e\}$ gebe man eine zugehörige, d.h. eine P_i erzeugende Äquivalenzrelation R_i auf A an.

a) $P_1 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}\}$

b) $P_2 = \{\{a, d, e\}, \{b, c\}\}$

c) $P_3 = \{\{a, e\}, \{b, c\}, \{d\}\}$

d) $P_4 = \{\{a, b, c, e\}, \{d\}\}$

AUFGABE 4

Sei A eine nichtleere Menge und B eine Teilmenge von A. Auf der Menge der Potenzmenge von A sei eine Relation R definiert als

$$X\,R\,Y \quad :\Leftrightarrow \quad X \cap B = Y \cap B.$$

a) Man zeige: R ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{P}(A)$.

b) Sei $A := \{1, 2, 3, 4\}$ und $B := \{1, 3, 4\}$. Man bestimme für $X := \{2, 3, 4\}$ die Äquivalenzklasse von $[X]$.

c) Sei $A := \{1, 2, 3, 4\}$ und $B := \emptyset$. Man bestimme für $X := \{1, 4\}$ die Äquivalenzklasse von $[X]$.