

## ÜBUNG 2

**Achtung:** In der kommenden Woche finden die Vorlesungen am Montag und Mittwoch **NUR online statt und zwar im WebEx Raum** <https://uni-flensburg.webex.com/meet/hinrich.lorenzen>

### AUFGABE 1

Lässt sich auf einer Menge  $M$  im Falle

a)  $M := \{a, b, c\}$

b)  $M := \{a, b, c, d\}$

eine Verknüpfung  $\circ$  mit  $b \circ b = c$  und  $c \circ a = b$  so definieren, dass  $(M, \circ)$  eine Gruppe ist?

### AUFGABE 2

Es seien die beiden folgenden Verknüpfungstabellen auf der Menge  $M := \{1, 2, 3, 4, 5\}$  gegeben:

$\circ$	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	1	4	5	3
3	3	4	5	2	1
4	4	5	1	3	2
5	5	3	2	1	4

$*$	1	2	3	4	5
1	4	3	1	5	2
2	3	5	2	1	4
3	1	2	3	4	5
4	5	1	4	2	3
5	2	4	5	3	1

Man beweise, dass *genau eine* der beiden Verknüpfungsstrukturen  $(M, \circ), (M, *)$  eine Gruppe ist.

### AUFGABE 3

Für alle  $a, b \in \mathbb{Q}$  sei für eine Verknüpfung  $*$  auf  $\mathbb{Q}$  definiert:

$$a * b := \begin{cases} \frac{a \cdot b}{a + b}, & \text{für } a \neq 0, b \neq 0, a + b \neq 0 \\ a + b, & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Man berechne  $0 * 0, 1 * (-1), 0 * \frac{1}{2}, (-\frac{2}{3}) * \frac{3}{4}$

b) Man zeige:  $\exists e \in \mathbb{Q} \quad \forall q \in \mathbb{Q} : e * q = q * e = q$

c) Man zeige:  $\forall q \in \mathbb{Q} \quad \exists q' \in \mathbb{Q} : q * q' = q' * q = e$

d) Man zeige:  $\forall p, q \in \mathbb{Q} : q * q' = q' * q$

Damit ist  $(\mathbb{Q}, *)$  schon fast eine kommutative Gruppe, den Nachweis der Assoziativität ersparen wir uns.

In Gruppen lassen sich zum Beispiel schöne Gleichungen lösen, hier gibt es eine:

e) Man bestimme die Lösungen der Gleichung  $x * x * 3 = \frac{3}{4}$  in  $(\mathbb{Q}, *)$

**AUFGABE 4**

Sei  $\oplus$  die „übertragsfreie Addition im Zehnersystem“ in  $\mathbb{N}_0$ , d.h. bei der (schriftlichen) Addition zweier Ziffern wird lediglich die Einerziffer notiert. Folgendes Beispiel soll dies illustrieren:

	2	8	4	1	2
$\oplus$	3	6	7	9	7
=	5	4	1	0	9

- a) Man zeige: Die Verknüpfungsstruktur  $(\mathbb{N}_0, \oplus)$  ist eine kommutative Gruppe.
- b) Man zeige: Die ein- und zweistelligen Zahlen aus  $\mathbb{N}_0$  bilden eine Untergruppe  $H$  von  $(\mathbb{N}_0, \oplus)$ , mit der Ordnung 100.
- c) Man gebe eine Untergruppe  $H_2$  von  $H$  an mit  $|H_2| = 2$ , also mit Ordnung 2.
- d) Gibt es entsprechende Untergruppen  $H_4, H_5, H_{50}$  von  $H$ ?