ÜBUNG 11

Abgabe der Bearbeitungen erst am Freitag, den 27. Mai bis 12 Uhr

AUFGABE 1

Man beweise:

a) Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} := \left\{\dfrac{n+1}{3n-1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $\dfrac{1}{3}$.

b) Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} := \left\{\dfrac{2n^2}{4n^2+1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

c) Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} := \left\{1+(-2)^n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

AUFGABE 2

Man untersuche die Folge

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} := \left\{\frac{|n-3|-n^2-4}{|2-n^2|-2n+3}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

auf Konvergenz und beweise ggf. die Konvergenz.

AUFGABE 3

Man beweise: Wenn eine reelle Zahlenfolge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann ist der Grenzwert eindeutig bestimmt.

AUFGABE 4

Wir wiederholen eine

Definition 0.1. *Sei T eine Teilmenge von $\mathbb{R}$.*
T heiße nach oben beschränkt genau dann, wenn es eine reelle Zahl $c \in \mathbb{R}$ so gibt, dass für alle $t \in T : t \leq c$ gilt.
Entsprechend heiße T nach unten beschränkt genau dann, wenn es ein $d \in \mathbb{R}$ so gibt, dass für alle $t \in T : \; d \leq t$ gilt.
T heiße beschränkt genau dann, wenn T nach unten und nach oben beschränkt ist.

a) Man gebe eine nach oben beschränkte unendliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ an.

b) Man gebe eine beschränkte unendliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ an.

c) Seien A, B beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Man beweise oder widerlege:
(i) $A \cup B$ ist beschränkt.
(ii) $A \cap B$ ist beschränkt.
(iii) $A \times B$ ist beschränkt. Man beachte die Definition 0.1.

Wir erweitern auf natürliche Weise die obige Definition auf den Begriff einer reellwertigen Funktion f, d.h. eine Funktion $f : T \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heiße genau dann nach oben beschränkt, wenn ihre Bild- bzw. Wertemenge $f(T) := \{y \in \mathbb{R} \mid f(x) = y\} \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt ist, wenn also gilt:

$$\exists c \in \mathbb{R} \;\; \forall y \in f(T) : y \leq c, \text{ dies ist gleichwertig mit : } \;\exists c \in \mathbb{R} \;\; \forall x \in T : f(x) \leq c.$$

Entsprechend definiere man „f heiße nach unten beschränkt“ und „f heiße beschränkt“.

Da Folgen spezielle reelle Funktionen sind, lässt sich der Begriff „Beschränkheit“ auch auf Folgen anwenden. . .

AUFGABE 5

Man untersuche die folgenden Folgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ auf Beschränkheit, d.h. man beantwortet (und begründet) die Fragen: Ist die Folge nach unten beschränkt, ist die Folge nach oben beschränkt, ist die Folge beschränkt?

a) $\{2n + (-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$

b) $\left\{\dfrac{n-1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

c) $\left\{\dfrac{n^2+1}{n^2+2n+2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

d) $\left\{\dfrac{1+6n+2n^2}{(n+3)n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

****

Wie erwünscht, folgen nun alte Klausuraufgaben, die letzten beiden Aufgaben haben bedingt durch die Pandemie ein besonderes Format.

AUFGABE 1

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) := (x^2, 2x+1)$ eine Funktion.

(i) Man gebe 2 Elemente der Funktion an.

(ii) Man untersuche die Funktion f auf Injektivität und Surjektivität (mit Beweis).

AUFGABE 2

Sei $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ mit $z \mapsto f(z) := \begin{cases} 2z+1, & z \geq 0 \\ -2z, & z < 0 \end{cases}$ eine Funktion.

Wie wir bereits gezeigt hatten, ist f offenbar eine bijektive Funktion und $f^{-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ ihre Umkehrfunktion.

a) Man bestimme $f^{-1}(3), f^{-1}(4)$ und $f^{-1}(5)$.

Wir definieren eine Verknüpfung $\circ$ auf $\mathbb{N}$ so, dass für alle $a, b \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a \circ b := f(f^{-1}(a) + f^{-1}(b)).$$

b) Man zeige, dass im allgemeinen $a \circ b \neq a + b$ für $a, b \in \mathbb{N}$ gilt.

c) Man zeige, dass das Verknüpfungspaar $(\mathbb{N}, \circ)$ eine kommutative Gruppe bildet, wobei (G1) (Assoziativität) nicht nachgewiesen werden muss.

d) Man bestimme die Lösungen der Gleichung $x \circ x \circ 11 = 23$ in $(\mathbb{N}, \circ)$.

AUFGABE 3

Man wähle die passenden Antworten aus.

a) Für die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $x_n := \dfrac{n+1}{2n}$ gilt:

☐ sie konvergiert ☐ sie divergiert ☐ sie divergiert gegen ∞ ☐ $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$
☐ $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$

b) Für die Menge von Paaren $F = \{((x,y),z) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z} \mid z = 2x^2 + 3y\}$ gilt:

☐ F ist eine Funktion ☐ F ist injektiv ☐ F ist surjektiv ☐ $((\sqrt{2},1),7) \in F$
☐ $((1,1),5) \in F$

c) Für das Supremum s der Menge $\{0.2, 0.22, 0.222, \dots\} = \{\frac{2}{10}, \frac{22}{100}, \dots\}$ gilt:

☐ $s = max\{0.2, 0.22, 0.222, \dots\}$ ☐ $s = \frac{2}{9}$ ☐ $s = \frac{3}{10}$ ☐ s existiert nicht ☐ $s = 0.\overline{2}$

d) Für das Supremum s und das Infimum i der Menge $\{\frac{m}{n} \mid m,n \in \mathbb{N}, m < 3n\}$ gilt:

☐ $s + i = 3$ ☐ s existiert nicht und $i = 0$ ☐ i existiert nicht und $s = 3$
☐ $s = 3$ und $i = 0$ ☐ $s = \frac{1}{3}$ und $i = 0$.

AUFGABE 4

Man beurteile folgende Aussagen.	wahr	falsch
$\forall r \in \mathbb{R}\ \exists m \in \mathbb{Z} : m < r$	☐	☐
$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists a,b \in \mathbb{R} : 0 < \frac{1}{n} < a < \frac{1}{b}$	☐	☐
$\forall r,s \in \mathbb{R} : r < s \Rightarrow \frac{1}{s} < \frac{1}{r}$	☐	☐
$\forall r,s \in \mathbb{R} : r < s \Rightarrow \frac{1}{r} < \frac{1}{s}$	☐	☐
$\forall x \in \mathbb{R} : \lvert x-1\rvert + \lvert 3-x\rvert \geq 2$	☐	☐
$\forall x,y,a,b \in \mathbb{R}_{>0} : \frac{a}{b} < \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+x}{b+y} < \frac{x}{y}$	☐	☐