

10. Der Satz des Ptolemaios und die Formel von Brahmagupta

Klaudios Ptolemaios (85 – 165) war der bedeutendste Astronom der Antike. Er entwickelte die Epizykeltheorie der Planetenbahnen: Die Planeten bewegen sich auf Kreisen, die ihrerseits auf Kreisen abrollen, und dies in mehrfacher Stufung. Zur Beschreibung des Systems der damals bekannten sechs Planeten benötigte er 77 Kreise. In seiner Theorie blieb offen, ob sich die Erde um die Sonne bewegt oder umgekehrt. Sein Hauptwerk hieß "Die große mathematische Sammlung", griechisch "megale mathematike syntaxis". Arabische Gelehrte machten daraus al megalé ... (al ist der arabische Artikel), und daraus entstand der eigentlich sinnlose spätere Titel "Almagest", dem der Anklang an das lateinische gestae (Taten) eine scheinbare Sinnfälligkeit gibt.

Für astronomische Berechnungen erfand Ptolemaios den nach ihm benannten Satz, der in gewisser Weise die Trigonometrie vorwegnimmt.

Satz 10.1

Ist das Viereck ABCD mit den Seitenlängen a, b, c, d und den Diagonalenlängen e, f ein Sehnenviereck, so gilt $ef = ac + bd$.

Beweis

O. B. d. A. zerlege die Diagonale \overline{DB} den Winkel bei D so, dass der Teilwinkel an der Seite \overline{DA} höchstens so groß ist wie der Teilwinkel an der Seite \overline{DC} . Der Winkel bei \overline{DA} wird an der Seite \overline{DC} angetragen. Der Schnittpunkt seines freien Schenkels mit der Diagonale \overline{AC} sei E. Nach dem Umfangswinkelsatz liegen bei B und C gleiche Teilwinkel. (In der Figur sind gleich große Winkel gleich signiert.) Daher sind die Dreiecke DAB und DEC ähnlich. Daraus folgt

$$(1) f:a = c:e_2$$

Die Dreiecke DAE und DBC sind ebenfalls ähnlich.

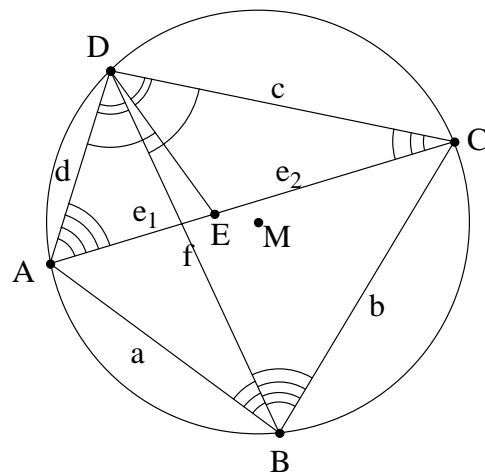
Ihre Winkel bei A und B sind nämlich nach dem

Umfangswinkelsatz gleich, und ihre Winkel bei D sind gleich, da sie aus den Winkeln der Dreiecke DAB und DEC durch Addition des gleichen Winkels entstehen. (Im Sonderfall könnte dieser Winkel der Nullwinkel sein; das beeinträchtigt aber die weitere Herleitung nicht.) Daraus folgt

$$(2) f:b = d:e_1.$$

Aus (1) und (2) folgt

$$ef = (e_1 + e_2)f = ac + bd.$$



Satz 10.2

Satz des Ptolemaios mit Verschärfung

Für jedes Viereck ABCD mit den Seitenlängen a, b, c, d und den Diagonalenlängen e, f gilt $ef \leq ac + bd$.

Die Gleichheit $ef = ac + bd$ tritt genau dann ein, wenn das Viereck ein Sehnenviereck ist.

Beweis

In der Figur sind gleich große Winkel gleich signiert. Die Rechtfertigungen ergeben sich schrittweise im Beweisgang.

Das Viereck ABCD ist in der Figur als konvex dargestellt. Die Konvexität ist aber keine Voraussetzung; man überzeugt sich, dass man an einem nicht-konvexen Viereck ebenso schließen kann.

O. B. d. A. zerlege die Diagonale \overline{DB} den Winkel bei D so, dass der Teilwinkel an der Seite \overline{DA} höchstens so groß ist wie der Teilwinkel an der Seite \overline{DC} .

Über der Seite \overline{DC} wird durch Winkelantragung das zu Dreieck DAB ähnliche Dreieck DEC errichtet. Es gilt

$$(1) f:a = c:e_2$$

und

$$d:f = |DE| : c, \text{ also } d : |DE| = f : c$$

Diese Verhältnisgleichheit wird als jetzt Aussage über die Dreiecke DAE und DBC aufgefasst. Ihre Winkel bei D sind gleich, da sie aus den Winkeln der Dreiecke DAB und DEC durch Addition des gleichen Winkels entstehen. (Im Sonderfall könnte dieser Winkel der Nullwinkel sein; das beeinträchtigt aber die weitere Herleitung nicht.) Also sind die Dreiecke DAE und DBC ähnlich. Hieraus folgt

$$(2) f:b = d:e_1.$$

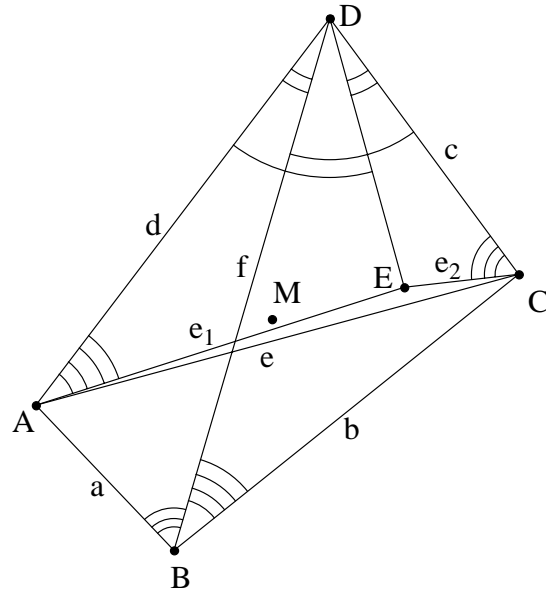
(1) und (2) ergeben zusammen

$$(e_1 + e_2)f = ac + bd.$$

Mit der Dreiecksungleichung $e \leq e_1 + e_2$ folgt

$$ef \leq ac + bd.$$

Gleichheit tritt nur dann ein, wenn E auf \overline{AC} liegt.



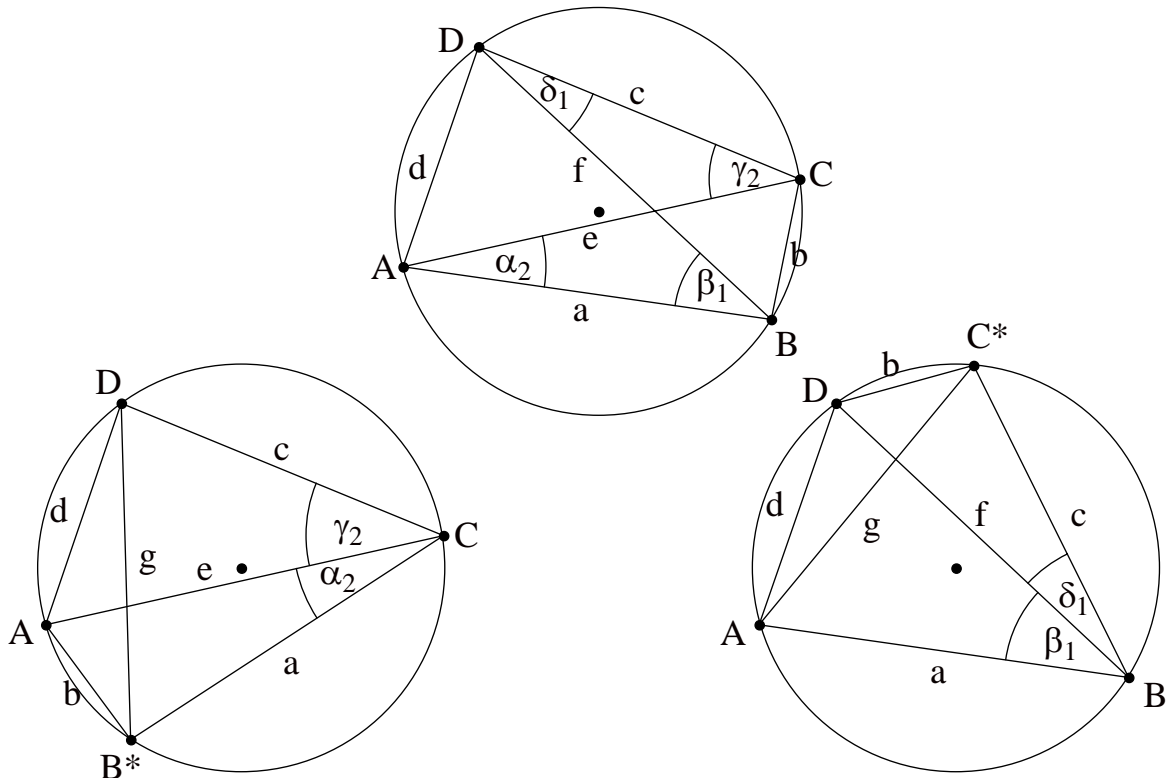
Einerseits zeigt der Beweis von Satz 10.1, dass E auf \overline{AC} liegt, falls das Viereck ein Sehnenviereck ist.

(Unabhängig davon könnte man auch so schließen: Ist das Viereck ein Sehnenviereck, so ergänzen sich seine Winkel bei B und D zu 180° . Wegen der Teilwinkelmäßigkeiten bei B und A bzw. C summieren sich die Winkel bei A, C und D im Viereck AECD zu 180° . Der Winkel bei E muss also gestreckt sein; das Viereck entartet zum Dreieck; E liegt auf \overline{AC} .)

Andererseits ist das Viereck ein Sehnenviereck, falls E auf \overline{AC} liegt. Dann nämlich erscheint die Sehne \overline{AD} von B und C aus unter gleichem Winkel. Nach der Umkehrung des Umfangswinkelsatzes liegen dann A, B, C, D auf einem Kreis.

Aus vier vorgegebenen Seiten lassen sich drei (im Allgemeinen) verschiedene Sehnenvierecke konstruieren. In der folgenden Figur wird aus dem Sehnenviereck ABCD durch Zerschneiden längs der Diagonale \overline{AC} und Umwenden des Dreiecks ABC das Sehnenviereck AB^*CD und durch Zerschneiden längs der Diagonale \overline{BD} und Umwenden des Dreiecks BCD das Sehnenviereck ABC^*D . Die Vierecke AB^*CD und ABC^*D haben eine Diagonale gleicher Länge g. Nach dem Umfangswinkelsatz, angewendet auf das ursprüngliche Viereck, gilt nämlich $\alpha_2 = \delta_1$ und $\gamma_2 = \beta_1$, so dass die Teildreiecke B^*CD und ABC^* kongruent sind. Man könnte die dritte Form des Sehnenvierecks also auch durch Zerschneiden der zweiten Form

längs g und Umwenden des Dreiecks AB^*D bekommen. Die drei auf diese Weise "verwandten" Sehnenvierecke haben also nur drei verschiedene Diagonallängen.



Die Diagonallängen e , f und g lassen sich durch die Seiten ausdrücken.

Satz 10.3

Mit den Bezeichnungen der obigen Figuren gilt

$$e = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}}; \quad f = \sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}}; \quad g = \sqrt{\frac{(ad + bc)(ab + cd)}{ac + bd}}$$

Beweis

Es gilt

$$ef = ac + bd; \quad fg = ab + cd; \quad ge = ad + bc$$

Hieraus folgt

$$e^2 f^2 g^2 = (ac + bd)(ab + cd)(ad + bc)$$

und damit

$$\begin{aligned} e^2 &= \frac{e^2 f^2 g^2}{f^2 g^2} = \frac{(ac + bd)(ab + cd)(ad + bc)}{(ab + cd)^2} \\ &= \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{(ab + cd)} \end{aligned}$$

Die Formeln für f und g entstehen analog.

Die drei flächengleichen Formen des Sehnenvierecks mit vier gegebenen Seiten in unterschiedlicher Reihenfolge führen zur Vermutung, dass der Flächeninhalt des Sehnenvierecks eine symmetrische (d. h. gegen Vertauschungen der Seiten unempfindliche) Funktion von a ,

b, c und d sein muss. Dies wird durch den folgenden Satz von Brahmagupta bestätigt. (Brahmagupta, 598 – 665, indischer Mathematiker)

Satz 10.4

Satz von Brahmagupta

Der Flächeninhalt des Sehnenvierecks mit den Seitenlängen a, b, c, d ist gegeben durch

$$|Y ABCD| = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}. \text{ Hierbei ist } s \text{ der halbe Umfang.}$$

Beweis

Nach Satz 8.3 gilt $|Y ABCD| = \frac{1}{2}ef \sin \varphi$. Es ist zweckmäßig, zu $16|Y ABCD|^2$ überzugehen.

Es gilt

$$\begin{aligned} 16|Y ABCD|^2 &= 4e^2f^2 \sin^2 \varphi \\ &= 4e^2f^2(1 - \cos^2 \varphi) \\ &= 4(ac + bd)^2 - 4e^2f^2 \cos^2 \varphi \end{aligned}$$

In der letzten Umformung wurde der Satz von Ptolemaios benutzt. Nun wird $e^2f^2 \cos^2 \varphi$ durch die Seitenlängen ausgedrückt. Wegen $\cos(180^\circ - \varphi) = -\cos \varphi$ ist es belanglos, welcher der zwei Diagonalenwinkel mit φ bezeichnet wird. Es gilt

$$a^2 = e_1^2 + f_1^2 - 2e_1f_1 \cos \varphi$$

$$b^2 = f_1^2 + e_2^2 + 2f_1e_2 \cos \varphi$$

$$c^2 = e_2^2 + f_2^2 - 2e_2f_2 \cos \varphi$$

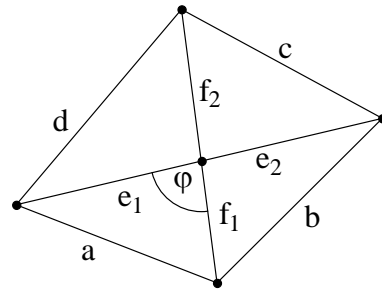
$$d^2 = f_2^2 + e_1^2 + 2f_2e_1 \cos \varphi$$

Daraus folgt

$$-a^2 + b^2 - c^2 + d^2 = 2ef \cos \varphi$$

und hiermit

$$\begin{aligned} 16|Y ABCD|^2 &= 4(ac + bd)^2 - (-a^2 + b^2 - c^2 + d^2)^2 \\ &= \left(2(ac + bd) + (-a^2 + b^2 - c^2 + d^2)\right) \left(2(ac + bd) - (-a^2 + b^2 - c^2 + d^2)\right) \\ &= \left(- (a-c)^2 + (b+d)^2\right) \left((a+c)^2 - (b-d)^2\right) \\ &= (a-c+b+d)(-a+c+b+d)(a+c+b-d)(a+c-b+d) \\ &= (2s-2c)(2s-2a)(2s-2d)(2s-2b) \\ &= 16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) \end{aligned}$$



Satz 10.5

Der Flächeninhalt des Vierecks mit den Seitenlängen a, b, c, d erfüllt die Ungleichung

$|Y ABCD| \leq \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$. Gleichheit tritt genau dann ein, wenn das Viereck ein Sehnenviereck ist.

Beweis

Im Beweis von Satz 10.4 wurde die Voraussetzung, das Viereck müsse ein Sehnenviereck sein, nur bei der Formel $ef = ac + bd$ benutzt. Ist das Viereck kein Sehnenviereck, gilt nach dem verschärften Satz des Ptolemaios $ef < ac + bd$.

Die Gleichung $-a^2 + b^2 - c^2 + d^2 = 2ef \cos \varphi$ wurde für das allgemeine konvexe Viereck bewiesen. Dies reichte bei Satz 10.4 aus, da ein Sehnenviereck stets konvex ist. Für nicht-

konvexe Vierecke gilt, wie man sich an einer entsprechenden Figur überzeugt, dieselbe Gleichung. Einfacher schließt man aber so: Aus einem nicht-konvexen Viereck wird ein konvexes Viereck mit gleichen Seitenlängen, wenn man die "eingedrückte" Ecke an der außerhalb des Vierecks liegenden Diagonalen spiegelt. Offenbar vergrößert sich dabei der Flächeninhalt, so dass die für konvexe Vierecke geltende Ungleichung erst recht und unter Ausschluss der Gleichheit für nicht-konvexe Vierecke gilt.

Also gilt für jedes Viereck, das kein Sehnenviereck ist, die Ungleichung

$$|Y_{ABCD}| < \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

Bemerkungen

Die Vorgabe der Seiten bestimmt ein Viereck nicht eindeutig. Man kann sich das Viereck mit Gelenken in den Ecken vorstellen. Es lässt sich zeigen, dass sich ein solches Gelenkviereck immer in die Form eines Sehnenvierecks bringen lässt. Unter allen Vierecken mit gegebenen Seiten hat das Sehnenviereck den größten Flächeninhalt. Es ist in gewissem Sinn das "rundeste" aller dieser Vierecke, und insofern klingt in Satz 10.5 die so genannte isoperimetrische Ungleichung an. Diese besagt, dass unter allen umfangsgleichen (deutsch für "isoperimetrischen") Figuren der Kreis den größten Flächeninhalt besitzt. Der Beweis dieser Ungleichung überschreitet die Grenzen der Elementargeometrie; siehe dazu Kap. 9.