4. Sehnenviereck und Tangentenviereck

Satz 4.1
Die Winkelsumme des (allgemeinen!) Vierecks ist 360°. Die Winkelsumme im n-Eck ist $(n-2)\cdot 180°$.

Begründung
Die folgenden Feststellungen sind nicht als Beweis zu verstehen.
Viereck: Es gibt mindestens eine Diagonale, die das Viereck in zwei Dreiecke zerlegt.
n-Eck: Falls eine Zerlegung durch Diagonalen aus einem einzigen Eckpunkt heraus möglich ist, entstehen $n-2$ Dreiecke. Die Winkelsumme ist daher $(n-2)\cdot 180°$. Zerlegt man ein n-Eck in m Dreiecke (wobei $m \geq n-2$), so liegen $m-(n-2)$ Ecken innen. Die dort auftretenden Vollwinkel sind von der Winkelsumme aller Dreiecke zu subtrahieren. Das gibt die Winkelsumme $m\cdot 180° - (m-(n-2))\cdot 360° = (n-2)\cdot 180°$. Unbewiesen bleibt hier, dass überhaupt eine Dreieckszerlegung möglich ist.

Erklärungen und Aussagen zu allgemeinen Vierecken

Ein Viereck heißt konvex, wenn alle Winkel kleiner als 180° sind. Die Verbindungsstrecke zwei beliebiger Punkte in einem konvexen Viereck liegt ganz im Inneren.
Ein Viereck heißt nicht-konvex, wenn es einen überstumpfen Winkel hat.
Konvexe Vierecke lassen sich auch durch die Lage des Diagonalenschnittpunkts kennzeichnen: Er liegt auf beiden Diagonalen (aufgefasst als Strecken).
Bei nicht-konvexen Vierecken schneiden sich die Geraden AC und BD in einem Punkt S, der auf genau einer Diagonalen liegt.
Falls sich zwei Geraden AC und BD schneiden, der Schnittpunkt aber weder auf $\overline{AC}$ noch auf $\overline{BD}$ liegt, ist das Viereck ABCD "überschlagen", d. h. zwei seiner Seiten schneiden sich.

Im Weiteren sind, wenn ohne Zusatz von Vierecken die Rede ist, konvexe und nicht-konvexe gemeint, überschlagene aber ausgeschlossen. Das gilt auch schon für Satz 4.1.

Definition
Ein Viereck, dessen Eckpunkte auf einem Kreis liegen, heißt Sehnenviereck.

Satz 4.2
Ein Viereck ist genau dann ein Sehnenviereck, wenn gegenüberliegende Winkel sich zu 180° ergänzen.

Beweis
"$\Rightarrow$" Vor.: Viereck sei SV
Das Sehnenviereck ist konvex (Eigenschaft des Kreises!). Die Diagonalen verlaufen also innen. Das Viereck ABCD ist in zwei Dreiecke mit Seite $\overline{AC}$ zerlegbar. Mit Blick auf die Sehne $\overline{AC}$ wird der Umfangswinkelsatz angewendet. Daher gilt $\beta + \delta = 180°$. Entsprechend für die beiden anderen Winkel. (Oder: Winkelsumme)

"$\Leftarrow$" Vor.: Winkelergänzung zu 180°
Betrachte den Umkreis k von ΔABC. Die Seite $\overline{AC}$ werde als Sehne aufgefasst, die von B aus unter dem Winkel β erscheint. Der Eckpunkt D kann nicht auf derselben Seite von AC liegen wie B, denn dann hätte das Viereck bei D einen überstumpfen Winkel entgegen der Voraus-

setzung der Winkelergänzung zu 180°. Nach der Umkehrung des Umfangswinkelsatzes liegt D also auf dem zweiten Bogen von k.

Definition
Ein Tangentenviereck ist ein konvexes Viereck, dessen Seiten einen Kreis berühren.

Bemerkung: Die Konvexität wird i. w. der Übersichtlichkeit halber vorausgesetzt. Sie sichert, dass der Kreis im Innern des Vierecks liegt.

Tangentenvierecke sind also genau die konvexen Vierecke mit Inkreis. Konstruktion durch Winkelhalbierende. Falls man schon weiß, dass es sich um ein Tangentenviereck handelt, genügen zwei sich schneidende Winkelhalbierende. (Es kann zusammenfallende Winkelhalbierende geben!) Die Existenz eines Inkreises ist gleichwertig damit, dass alle vier Winkelhalbierenden durch einen Punkt gehen. Es ist i. a. schwierig, diese Eigenschaft nachzuweisen. Eine oft bequemere Möglichkeit gibt Satz 4.4.

Satz 4.3
Für jedes konvexe Tangentenviereck gilt $a + c = b + d$.

Beweis: Satz 3.3 anwenden

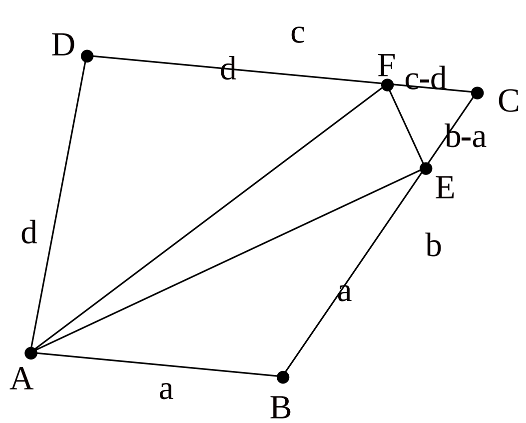
Satz 4.4
Ein konvexes Viereck mit $a + c = b + d$ ist ein Tangentenviereck.

Bemerkung: Aus $a + c = b + d$ allein folgt die Konvexität nicht. Zu nicht-konvexen Tangentenvierecken kommt evtl. eine Aufgabe.

Beweis:
1. Fall: $a = b$. Dann auch $c = d$. Das Viereck ist ein konvexer Drachen. Die Diagonale $\overline{BD}$ zerlegt das Viereck in zwei kongruente Dreiecke. Sie ist daher Winkelhalbierende in B und in D. Die Winkelhalbierende in A schneide diese Diagonale in I. Wegen der Abstandseigenschaft der drei (!) Winkelhalbierenden gilt $d(CD, I) = d(DA, I) = d(AB, I) = d(BC, I)$. Also hat das Viereck einen Inkreis und ist damit ein Tangentenviereck.

Bemerkung: Damit ist bewiesen, dass jeder konvexe Drachen ein Tangentenviereck ist.

2. Fall: Seien a und b verschieden; o. B. d. A. $a < b$. Dann $d < c$.
Man trägt eine Strecke der Länge a von B aus auf $|BC|$ und eine Strecke der Länge d von D aus auf $|DC|$ ab. Endpunkte E, F. Die Dreiecke AEB und AFD sind gleichschenklig, ebenso wegen $b – a = c – d$ das Dreieck ECF. Die Basisseiten bilden das Dreieck AEF. Man betrachte die Winkelhalbierenden in B, C, D. Sie sind wegen der Gleichschenkligkeit zugleich Mittelsenkrechte in je einem der an B, C, D anliegenden Dreiecke. Sie sind aber auch Mittelsenkrechte in ΔAEF und schneiden sich daher in einem Punkt. Gehen drei Winkelhalbierende eines Vierecks durch einen Punkt, so auch die vierte.



Bemerkung: Es gibt Vierecke, die sowohl Sehnen- als auch Tangentenviereck sind. Triviales Beispiel ist das Quadrat, weitere Beispiele sind der rechtwinklige Drachen und gewisse gleichschenklige Trapeze. Es gibt aber auch Sehnen-Tangentenvierecke, die keine "besonderen Vierecke" im schulüblichen Sinn sind.