Lösungen der Aufgabenvorschläge zu „Von Ungleichungen, die nicht ‚gelöst' werden wollen"
MU 5/2009

von Anca Popa-Fischer

1. Für $x, y > 0$ und $p, q > 0$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt $x \cdot y \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$.

Beweis Hier hilft die Strategie V, wenn man sich an die verallgemeinerte GA-Ungleichung[1] erinnert. Diese besagt, dass für alle $x_i > 0$ und alle $g_i > 0$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ mit $g_1 + \ldots + g_n = 1$ die Ungleichung $x_1^{g_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{g_n} \leq g_1 \cdot x_1 + \ldots + g_n \cdot x_n$ gilt. Dass wir $n = 2$ und $g_1 := \frac{1}{p}$ sowie $g_2 := \frac{1}{q}$ wählen, ist naheliegend. Danach ergibt sich auch die Wahl $x_1 := x^p$ und $x_2 := y^q$, was den Beweis beendet. Wir bemerken noch, dass die Ungleichung auch für $x = 0$ oder $y = 0$ wahr ist. □

2. Für $a_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n$ mit $n \geq 2)$ und $s := a_1 + \ldots + a_n$ gilt:

$$\frac{a_1}{s - a_1} + \frac{a_2}{s - a_2} + \ldots + \frac{a_n}{s - a_n} \geq \frac{n}{n-1}$$

Beweis Für diese Ungleichung gibt es viele Beweismöglichkeiten (unter anderem mittels Strategie IV oder als Anwendung der Jensen-Ungleichung). Hier sei folgender Weg vorgeschlagen: Wir bemerken, dass wir mit $\frac{s-a_1}{a_1} = \frac{s}{a_1} - 1$ leichter arbeiten können als mit $\frac{a_1}{s-a_1}$. Das bringt uns auf die Idee, die Notationen zu ändern. Es sei $x_i := s - a_i > 0$. Dann gilt $a_i = s - x_i$ (woraus durch Addition dieser n Gleichungen $s = ns - (x_1 + \ldots + x_n)$, also $s = \frac{1}{n-1}(x_1 + \ldots + x_n)$ folgt) und wir haben erreicht, dass die zu beweisende Ungleichung wie folgt lautet:

$$\frac{s - x_1}{x_1} + \frac{s - x_2}{x_2} + \ldots + \frac{s - x_n}{x_n} \geq \frac{n}{n-1}.$$

Es gilt

$$\frac{s - x_1}{x_1} + \frac{s - x_2}{x_2} + \ldots + \frac{s - x_n}{x_n} = s\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) - n =$$

$$= \frac{1}{n-1}(x_1 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) - n.$$

[1] siehe Artikel „Mittelmaß und Optimum" in MU 5/2009

Nun gilt wegen der Mittelwertungleichung $H \leq A$ (zwischen harmonischem und arithmetischem Mittel), dass

$$(x_1 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2$$

ist. Es bleibt lediglich zu bemerken, dass $\frac{1}{n-1} \cdot n^2 - n = \frac{n}{n-1}$ gilt, um den Beweis dieser Ungleichung zu beenden. $\square$

Bemerkung Diese Ungleichung findet man unter vielen Spezialfällen in Aufgabensammlungen, zum Beispiel unter folgender Form: Man zeige, dass $\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{a^2+c^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \geq \frac{3}{2}$, für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a, b, c \neq 0$ gilt.

3. Man beweise für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, die Ungleichung

$$(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^{\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}} \leq x_1^{x_1} \cdot x_2^{x_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{x_n}$$

Beweis Die Schwierigkeit rührt hier von den vielen unterschiedlichen Exponenten her. Um diese Schwierigkeit zu umgehen, bietet sich das Logarithmieren an, was aufgrund von $x_i > 0$ erlaubt ist. Außerdem unterstützt auch das Vorkommen von Produkten diese Strategie. Da der natürliche Logarithmus streng steigend ist, ist die Ungleichung zu

$$\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \cdot (\ln x_1 + \ldots + \ln x_n) \leq x_1 \ln x_1 + \ldots + x_n \ln x_n$$

äquivalent. Das erinnert an die Chebyshev-Ungleichung. Um diese zu erreichen, brauchen wir lediglich die Ungleichung durch n zu teilen sowie zu bemerken, dass wir aufgrund der Symmetrie ohne Einschränkung annehmen dürfen, dass $x_1 \leq \ldots \leq x_n$ gilt (was dann auch $\ln x_1 \leq \ldots \leq \ln x_n$ zur Folge hat). $\square$

4. Man beweise: Unter beliebig gewählten 28 Punkten im Innern eines Würfels mit Kantenlänge 1 existieren stets zwei Punkte, die voneinander höchstens den Abstand $\frac{\sqrt{3}}{3}$ besitzen.

Beweis Das ist eine typische Schubfachprinzip-Aufgabe (Strategie VI). Der Würfel wird in 27 gleichgroße Würfel (mit Kantenlänge $\frac{1}{3}$) zerlegt. In einem dieser kleinen Würfel (mitsamt Rand) befinden sich mindestens zwei Punkte. Die größte Entfernung zwischen zwei Punkten eines solchen Würfels ist die Länge einer Würfeldiagonale, also $\frac{\sqrt{3}}{3}$. $\square$

5. Gegeben seien fünf beliebige Punkte im Innern eines Einheitsquadrats. Dann gibt es darunter zwei Punkte, die höchstens den Abstand $\frac{1}{\sqrt{2}}$ voneinander haben.

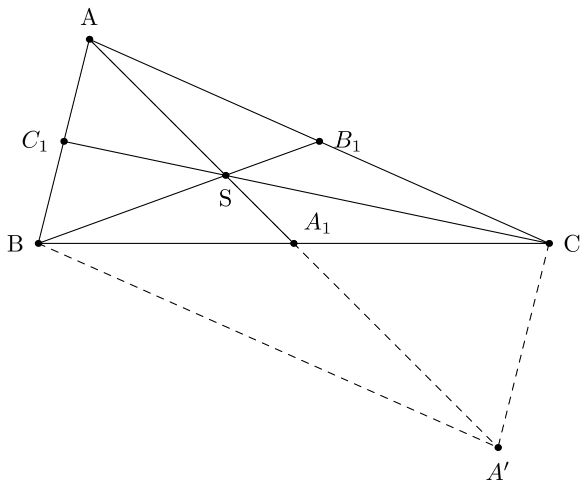
Beweis Das ist ebenfalls eine Anwendung des Schubfachprinzips. Wird das Einheitsquadrat in vier gleichgroße Quadrate zerlegt, so liegen in (mindestens) einem der Quadrate mindestens zwei Punkte. Diese können höchstens so weit voneinander entfernt sein, wie die Länge der Diagonale des kleinen Quadrats ist. Diese beträgt $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. $\square$

6. Man beweise, dass in jedem Dreieck die Summe der Höhenlängen kleiner als der Umfang des Dreiecks ist.

Beweis Es bezeichne ABC das Dreieck, a die Länge der Seite die dem Winkel in A gegenüberliegt und h_a die Länge der Höhe aus A. Analoge Bezeichnungen gelten für b, c bzw. h_b, h_c. Da in einem rechtwinkligen Dreieck jede Kathete kürzer als die Hypotenuse ist, gelten $h_a < b$ und $h_a < c$, woraus $h_a < \frac{b+c}{2}$ folgt (man beachte: Ist ΔABC rechtwinklig mit rechtem Winkel z. B. bei C, so gelten $h_a = b$ und $h_a < c$, woraus noch immer $h_a < \frac{b+c}{2}$ folgt). Analog folgen $h_b < \frac{a+c}{2}$ und $h_c < \frac{a+b}{2}$. Addition dieser Ungleichungen ergibt $h_a + h_b + h_c < a + b + c$. □

7. Man zeige, dass in jedem Dreieck die Summe der Längen der Seitenhalbierenden größer als der halbe Umfang und kleiner als der Umfang des Dreiecks ist.

Beweis Es bezeichnen s_a, s_b bzw. s_c die Längen der Seitenhalbierenden der Seiten a, b bzw. c (deren Längen werden ebenso bezeichnet). Durch B ziehen wir eine Parallele zu AC und durch C eine Parallele zu AB. Es sei A' ihr Schnittpunkt.



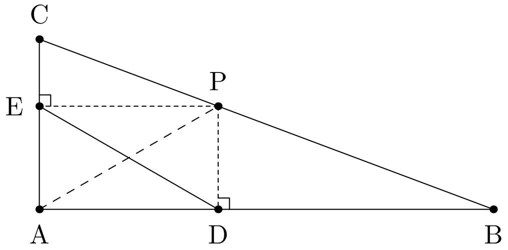
Dann ist $ABA'C$ ein Parallelogramm. Da sich die Diagonalen in einem Parallelogramm halbieren, gilt $|AA'| = 2s_a$. Aus dem Dreieck $AA'B$ folgt mittels Dreiecksungleichung: $2s_a < b + c$. Analog folgen die Ungleichungen $2s_b < a + c$ und $2s_c < a + b$. Addition dieser Ungleichungen liefert $s_a + s_b + s_c < a + b + c$.
Um noch $s_a+s_b+s_c > \frac{a+b+c}{2}$ zu beweisen, benutzen wir die Dreiecksungleichung im Dreieck $A'A_1B$. Es folgt $s_a + \frac{a}{2} > b$. Analog folgen $s_b + \frac{b}{2} > c$ und $s_c + \frac{c}{2} > a$. Erneut folgt mittels Addition die gewünschte Ungleichung.

□

Bemerkung Die untere Schranke kann verbessert werden: Es gilt sogar $s_a + s_b + s_c > \frac{3}{4}(a + b + c)$, denn die Dreiecksungleichung für das Dreieck BSC liefert $\frac{2}{3}s_b + \frac{2}{3}s_c > a$, also $s_b + s_c > \frac{3}{2}a$. Erneut liefert die Addition dieser und der analogen Ungleichungen $s_a + s_c > \frac{3}{2}b$ und $s_a + s_b > \frac{3}{2}c$ das gewünschte Ergebnis. Vielen Dank an Herrn Hartmut Wellstein für diesen Hinweis!

8. Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel in A. Durch einen Punkt P der Hypotenuse werden die Lote auf die Katheten gezogen. Es seien D und E die Lotfußpunkte. Man bestimme P so, dass $|DE|$ minimal ist.

Beweis Die Schwierigkeit rührt hier daher, dass beide Punkte D und E beweglich sind.

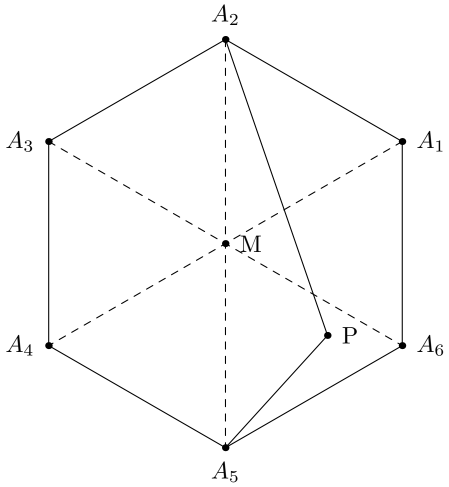


Diese Schwierigkeit lässt sich etwas abmildern, wenn man bemerkt, dass $ADPE$ ein Rechteck ist und somit $|DE| = |AP|$ gilt. Nun ist der Punkt A fest. Da $P \in \overline{BC}$ gilt, ist $|AP|$ genau dann minimal, wenn $\overline{AP}$ die Höhe auf $\overline{BC}$, also P der Höhenfußpunkt ist.

□

9. Gegeben sei ein regelmäßiges n-Eck $A_1A_2 \dots A_n$ mit einer geraden Anzahl von Seiten. Man beweise: Dann gibt es genau einen Punkt M, für den die Summe $|MA_1| + |MA_2| + \dots + |MA_n|$ minimal ist.

Beweis Es sei P ein beliebiger Punkt (P darf auch außerhalb des n-Ecks liegen).

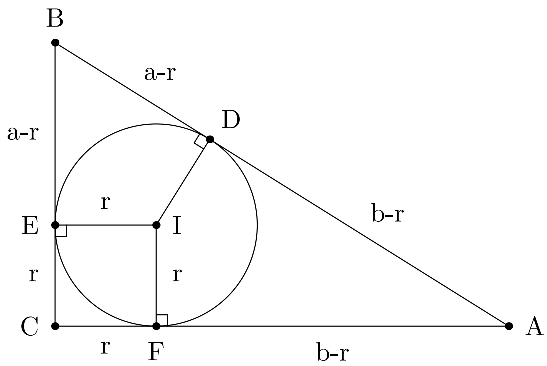


Wir betrachten die $\frac{n}{2}$ (eventuell entartete) Dreiecke $PA_iA_{\frac{n}{2}+i}$ für $i = 1, \dots, \frac{n}{2}$. Die Dreiecksungleichung liefert $|PA_i| + |PA_{\frac{n}{2}+i}| \geq |A_iA_{\frac{n}{2}+i}|$. Gleichheit gilt genau dann, wenn P auf der Strecke $\overline{A_iA_{\frac{n}{2}+i}}$ liegt. Addition dieser $\frac{n}{2}$ Ungleichungen ergibt $|PA_1| + |PA_2| + \dots + |PA_n| \geq \left|A_1A_{\frac{n}{2}+1}\right| + \left|A_2A_{\frac{n}{2}+2}\right| + \dots + \left|A_{\frac{n}{2}}A_n\right|$. Die rechte Seite dieser Ungleichung hängt nicht von P ab. Diese untere Schranke wird genau dann angenommen, wenn P auf jeder Diagonale $\overline{A_iA_{\frac{n}{2}+i}}$ $\left(i = 1, \dots, \frac{n}{2}\right)$ liegt. Das ist genau dann der Fall, wenn P der Schnittpunkt M der Diagonalen ist (diesen Schnittpunkt gibt es, da das n-Eck regelmäßig ist).

□

10. Man beweise, dass in jedem rechtwinkligen Dreieck $2r \leq c(\sqrt{2} - 1)$ gilt, wobei r den Inkreisradius und c die Hypotenusenlänge bezeichnet.

Beweis



Es sei I der Mittelpunkt des Inkreises, also der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden. Es seien a, b die Kathetenlängen.
Es seien $D \in \overline{AB}$, $E \in \overline{BC}$, $F \in \overline{CA}$ die Berührungspunkte des Inkreises. Dann gelten $|CE| = |CF|$, $|AF| = |AD|$, $|BD| = |BE|$. Da $CFIE$ ein Rechteck mit $|CF| = |CE|$ ist, ist es sogar ein Quadrat mit Seitenlänge r. Damit gelten $b - r = |AF| = |AD|$ und $a - r = |BE| = |BD|$. Es ist also

$c = a - r + b - r$, also $2r = a + b - c$. Wir müssen $2r \le c(\sqrt{2} - 1)$ beweisen. Mit der obigen Beziehung ist das zu $a + b - c \le c(\sqrt{2} - 1)$ und damit zu $a + b \le c\sqrt{2}$ äquivalent. Mit dem Satz des Pythagoras ist das zu $a + b \le \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$ äquivalent.

Quadrieren (erlaubt, da beide Seiten positiv sind) ergibt die äquivalente Ungleichung $a^2 + 2ab + b^2 \le 2a^2 + 2b^2$, also $0 \le (a - b)^2$, was wahr ist. $\square$

11. Man zeige, dass der Diagonalenschnittpunkt eines konvexen Vierecks der Punkt ist, dessen Summe der Abstände zu den Eckpunkten des Vierecks minimal ist.

Beweis Der Beweis verläuft hier analog zum Beweis der Aufgabe 9. Wir haben es zwar nicht unbedingt mit einem regelmäßigen Viereck (also Quadrat) $ABCD$ zu tun, wichtig war in Aufgabe 9 aber nur, dass es eine gerade Anzahl von Seiten gibt und, dass sich (aufgrund der Regelmäßigkeit) die Diagonalen in einem Punkt schneiden. Beides ist bei einem konvexen Viereck stets der Fall. Dennoch kommt hier der Beweis nochmals.

Es sei P ein beliebiger Punkt. Die Dreiecksungleichung liefert für die (eventuell entarteten) Dreiecke PBD und PAC die Ungleichungen $|PB|+|PD| \ge |BD|$ und $|PA|+|PC| \ge |AC|$. Gleichheit gilt genau für $P \in \overline{BD}$ bzw. $P \in \overline{AC}$. Addition dieser zwei Ungleichungen liefert $|PA| + |PB| + |PC| + |PD| \ge |AC| + |BD|$. Da das Viereck $ABCD$ konvex ist, schneiden sich die Diagonalen $\overline{BD}$ und $\overline{AC}$. Somit gibt es einen (eindeutigen) Punkt P für den Gleichheit in den ersten beiden Ungleichungen (und damit auch in der letzten) gilt, nämlich den Diagonalenschnittpunkt.

$\square$

12. Bezeichnen α, β, γ die Winkel eines Dreiecks, so gelten:
a) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$
b) $\tan^2\frac{\alpha}{2} + \tan^2\frac{\beta}{2} + \tan^2\frac{\gamma}{2} \ge 1$
c) $\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \le \frac{1}{8}$

Beweis Das sind typische Anwendungen der Jensen-Ungleichung[2]. Hierfür benötigen wir folgenden Spezialfall der Jensen-Ungleichung: Für eine konvexe Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ (mit I Intervall) und alle $x, y, z \in I$ gilt $f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \le \frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3}$. Ist f konkav, so gilt $\ge$ statt $\le$.

Die Winkelmaße des Dreiecks seien in Radianten angegeben. Somit gelten $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$ und $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

a) Wir wenden die Jensen-Ungleichung auf die konkave Funktion $\sin\colon (0, \pi) \to \mathbb{R}$ an. Es folgt $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \le 3 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = 3 \cdot \sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

[2] siehe Artikel „Die Jensen-Ungleichung“ in MU 5/2009

b) Die Funktion $f\colon \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \tan^2 x$ ist konvex. In der Tat ist sie beliebig oft differenzierbar und die zweite Ableitung lautet

$$f''(x) = \frac{2\cos^2 x + 6\sin^2 x}{\cos^4 x}$$

und ist daher positiv.

Die Jensen-Ungleichung liefert für dieses f und für $x := \frac{\alpha}{2}$, $y := \frac{\beta}{2}$, $z := \frac{\gamma}{2}$ die Ungleichung

$$\tan^2 \frac{\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}}{3} \le \frac{\tan^2 \frac{\alpha}{2} + \tan^2 \frac{\beta}{2} + \tan^2 \frac{\gamma}{2}}{3},$$

also $3\tan^2 \frac{\pi}{6} \le \tan^2 \frac{\alpha}{2} + \tan^2 \frac{\beta}{2} + \tan^2 \frac{\gamma}{2}$. Da $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ist, folgt die gewünschte Ungleichung.

c) Hier ist die Wahl der Funktion nicht so unmittelbar klar wie bei den beiden vorherigen Beispielen. Es fällt auf, dass hier Produkte statt Summen auftreten. Da die Logarithmusfunktion Produkte in Summen umwandelt, ist die Wahl $f(x) = \ln(\sin x)$ mit $x \in (0, \pi)$ einen Versuch wert. In der Tat ergibt die Jensen-Ungleichung für diese konkave Funktion und für die Wahl $x = \frac{\alpha}{2}$, $y = \frac{\beta}{2}$, $z = \frac{\gamma}{2}$ genau die gewünschte Ungleichung.

Alternativ kann die GA-Ungleichung[1] (zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel) helfen, den Übergang von einem Produkt zu einer Summe zu bewältigen. In der Tat gelten $\sin \frac{\alpha}{2} > 0$, $\sin \frac{\beta}{2} > 0$ und $\sin \frac{\gamma}{2} > 0$, da $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ sind. Damit ist die GA-Ungleichung anwendbar. Es ist

$$\sqrt[3]{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}} \le \frac{\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2}}{3}.$$

Andererseits ist zu zeigen

$$\sqrt[3]{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}} \le \frac{1}{2}.$$

Es reicht somit, wenn wir

$$\frac{\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2}}{3} \le \frac{1}{2}$$

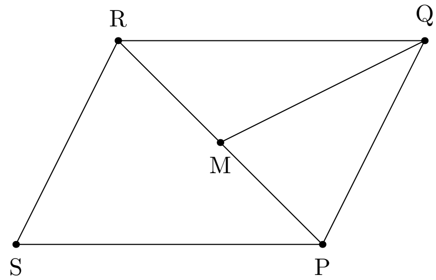
beweisen. Das folgt aber sofort aus der Jensen-Ungleichung für die konkave Funktion $\sin\colon (0, \pi) \to \mathbb{R}$. Tatsächlich ist

$$\frac{\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2}}{3} \le \sin \frac{\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}}{3} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

□

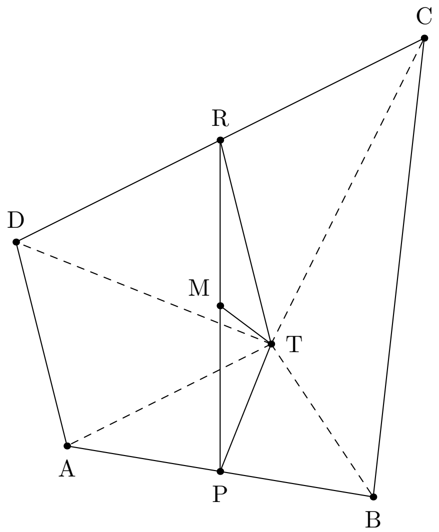
13. Gegeben sei ein konvexes Viereck $ABCD$. Man beweise, dass es genau einen Punkt M in der Ebene des Vierecks gibt, für den die Summe $|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2 + |MD|^2$ minimal ist.

Beweis



Wir verwenden, dass in jedem Parallelogramm $PQRS$ die Beziehung $2(|PQ|^2 + |QR|^2) = |PR|^2 + |QS|^2$ gilt (diese folgt z. B. durch Anwendung des Kosinussatzes in den Dreiecken PQR und SPQ unter Beachtung der Beziehung $\cos(\sphericalangle QPS) = -\cos(\sphericalangle RQP)$). Daraus folgt, dass in jedem Dreieck PQR die Beziehung $2(|PQ|^2 + |QR|^2) = |PR|^2 + 4|QM|^2$ gilt, wobei M den Mittelpunkt von $\overline{PR}$ bezeichnet.

(Diese letzte Beziehung gibt die genaue Länge einer Seitenhalbierenden eines Dreiecks in Abhängigkeit der Seitenlängen an).



Es seien P bzw. R die Mittelpunkte der Seiten $\overline{AB}$ bzw. $\overline{CD}$ des Vierecks $ABCD$. Es bezeichne M den Mittelpunkt von $\overline{PR}$. Außerdem sei T ein beliebiger Punkt der Ebene. Wenden wir die gewonnene Beziehung auf ΔATB und ΔCTD an, so folgen $2(|TA|^2 + |TB|^2) = |AB|^2 + 4|TP|^2$ und $2(|TC|^2 + |TD|^2) = |CD|^2 + 4|TR|^2$. Addition ergibt, dass $|TA|^2 + |TB|^2 + |TC|^2 + |TD|^2$ genau dann minimal ist, wenn $|TP|^2 + |TR|^2$ minimal ist (denn $|AB|^2 + |CD|^2$ ist fest). Damit haben wir es geschafft, die Untersuchung einer Summe von vier Quadraten auf die Untersuchung einer Summe von zwei Quadraten zu reduzieren. Fahren wir weiter so fort, das heißt, betrachten wir das Dreieck PTR wo $2(|TP|^2 + |TR|^2) = |PR|^2 + 4|MT|^2$ gilt, so folgt, dass $|TP|^2 + |TR|^2$ genau dann minimal ist, wenn $|MT|^2$, also $|MT|$ minimal ist.
Nun ist aber $|MT|$ genau dann minimal (genauer: gleich 0), wenn $T = M$ gilt. $\square$

Bemerkungen

a) Der Punkt M ist der Diagonalenschnittpunkt des Seitenmittenvierecks (also eines Parallelogramms) $PQRS$, wenn Q bzw. S die Mittelpunkte von $\overline{BC}$ bzw. von $\overline{AD}$ bezeichnen. Das bedeutet insbesondere: Beginnen wir mit $\overline{QS}$ statt mit $\overline{PR}$, so erhalten wir selbstverständlich denselben Punkt M.

b) Im Beweis wurde die Voraussetzung der Konvexität nicht verwendet, das heißt, die Aufgabe gilt auch für konkave Vierecke.

c) Eine andere Beweisidee liefert die analytische Geometrie. Es seien (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) bzw. (d_1, d_2) die Koordinaten von A, B, C bzw. D und (x, y) die Koordinaten des gesuchten Punkts M. Zu minimieren ist der Ausdruck:

$$(x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(x-b_1)^2+(y-b_2)^2+(x-c_1)^2+(y-c_2)^2+(x-d_1)^2+(y-d_2)^2,$$

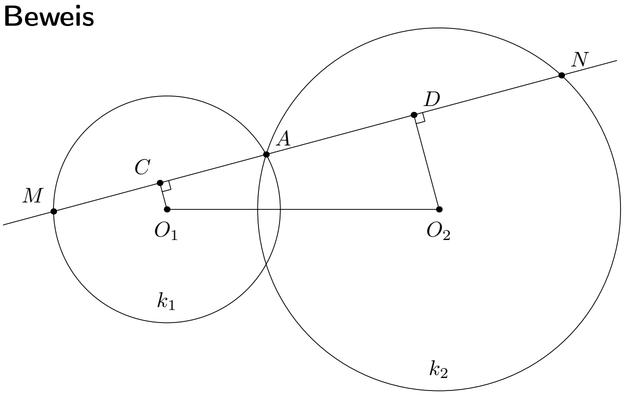
also

$$[4x^2-2x(a_1+b_1+c_1+d_1)+a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2]+[4y^2-2y(a_2+b_2+c_2+d_2)+a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2].$$

Das Minimum von $4x^2-2x(a_1+b_1+c_1+d_1)+a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2$ wird genau in der Abszisse des Scheitelpunkts angenommen, also für (eindeutig) $x=\frac{a_1+b_1+c_1+d_1}{4}$. Analog folgt: $4y^2-2y(a_2+b_2+c_2+d_2)+a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2$ ist für (eindeutig) $y=\frac{a_2+b_2+c_2+d_2}{4}$ minimal. Somit sind $\left(\frac{a_1+b_1+c_1+d_1}{4},\frac{a_2+b_2+c_2+d_2}{4}\right)$ die Koordinaten des gesuchten Punkts M (der „Eckenschwerpunkt" der Punkte A,B,C,D).

14. Es seien zwei sich schneidende Kreise k_1,k_2 und A einer der Schnittpunkte. Durch A wird eine Gerade gezeichnet, die die Kreise außer in A noch in $M\in k_1$ und $N\in k_2$ schneidet. Wie muss die Gerade verlaufen, damit $|MN|$ maximal ist?

Beweis



Es seien O_1,O_2 die Mittelpunkte der zwei Kreise. Es seien C bzw. D die Lotfußpunkte von O_1 bzw. O_2 auf MN. Dann gilt $|MN|=2|CD|$. Da O_1CDO_2 ein rechtwinkliges Trapez ist, gilt stets $|CD|\le|O_1O_2|$. Maximal ist $|MN|$ somit wenn $|CD|=|O_1O_2|$ gilt, also wenn $MN\parallel O_1O_2$ ist. □

15. Gegeben sei ein fester Punkt P im Innern eines Kreises. Welche Sehne durch P hat die kleinste Länge?

Beweis Es sei M der Mittelpunkt des Kreises, r sein Radius und $\overline{RS}$ irgendeine Sehne durch P sowie T der Lotfußpunkt von M auf $\overline{RS}$. Dann gilt $|RS|=2|TS|=2\sqrt{r^2-|MT|^2}=2\sqrt{r^2-(|MP|^2-|PT^2|)}=2\sqrt{r^2-|MP|^2+|PT|^2}$.

Da M,P fest sind, ist $|RS|$ genau dann minimal, wenn $|PT|$ minimal ist. Das ist genau für $T=P$ der Fall, also wenn $RS\perp MP$ gilt. □

Bemerkung

Der Sehnensatz $|PS|\cdot|PR|=(r+|MP|)(r-|MP|)$ liefert eine weitere Beweisidee. Da M, P fest sind, ist somit das Produkt $|PS|\cdot|PR|$ konstant. Dann ist aber die Summe $|RP|+|PS|=|RS|$ genau dann minimal, wenn $|RP|=|PS|$ gilt (siehe GA-Ungleichung). Da das Dreieck SMR gleichschenklig ist, muss dann $RS\perp MP$ gelten.