

Lösungen der Aufgabenvorschläge zu „Ungleichungen mit elementaren Funktionen“ MU 5/2009

von Anca Popa-Fischer

Ungleichungen mit Exponential- und Logarithmusfunktionen

i. $4^{\frac{3x}{2}} + 2^{x-\sqrt{x}} < 3 \cdot 2^{1-x-2\sqrt{x}}$

Lösung Die Existenzbedingung lautet wegen der Quadratwurzel $x \geq 0$. Eine leichte Umformung ergibt

$$2^{3x} + 2^{x-\sqrt{x}} < 6 \cdot \frac{1}{2^{x+2\sqrt{x}}}.$$

Multipliziert man diese Ungleichung mit $2^{x+2\sqrt{x}} (> 0)$, so ergibt sich

$$2^{4x+2\sqrt{x}} + 2^{2x+\sqrt{x}} < 6,$$

Ungleichung, bei der die quadratische Abhängigkeit direkt sichtbar ist. Die Substitution $t := 2^{2x+\sqrt{x}} (> 0)$ ergibt die quadratische Ungleichung $t^2 + t - 6 < 0$, mit der Lösungsmenge $(-3, 2)$. Wegen $t > 0$ bleibt nur $(0, 2)$ als Lösungsmenge. Somit ist noch $0 < 2^{2x+\sqrt{x}} < 2$, also $2^{2x+\sqrt{x}} < 2$ zu lösen. Wegen der streng steigenden Monotonie der Funktion $x \mapsto 2^x$ ist $2^{2x+\sqrt{x}} < 2$ zu $2x + \sqrt{x} < 1$ äquivalent (erneut eine quadratische Ungleichung). Mit $u := \sqrt{x} (\geq 0)$ ist zunächst $2u^2 + u - 1 < 0$ zu lösen, was zu $u \in (-1, \frac{1}{2}) \cap [0, \infty) = [0, \frac{1}{2})$ führt. Im letzten Schritt muss noch $0 \leq \sqrt{x} < \frac{1}{2}$ gelöst werden. Die Lösung der gegebenen Ungleichung lautet $[0, \frac{1}{4})$. \square

ii. $9^{\frac{3x}{2}+\sqrt{x}} < 8 \cdot 3^{2x+3\sqrt{x}} + 3^{x+4\sqrt{x}+2}$

Lösung Die Existenzbedingung lautet auch hier $x \geq 0$. Nach Umformung erhält man

$$3^{3x+2\sqrt{x}} < 8 \cdot 3^{2x+3\sqrt{x}} + 9 \cdot 3^{x+4\sqrt{x}}$$

und nach Division durch $3^{x+4\sqrt{x}} (> 0)$

$$3^{2x-2\sqrt{x}} < 8 \cdot 3^{x-\sqrt{x}} + 9,$$

was mittels der Substitution $t := 3^{x-\sqrt{x}} (> 0)$ die quadratische Ungleichung $t^2 - 8t - 9 < 0$ ergibt. Ihre Lösungsmenge ist $(-1, 9)$. Wegen $t > 0$ bleibt nur $(0, 9)$. Es ist also noch $3^{x-\sqrt{x}} < 9$, d. h. $x - \sqrt{x} < 2$ zu lösen. Mit $u := \sqrt{x} (\geq 0)$ ist zunächst $u^2 - u - 2 < 0$ zu lösen. Die Lösung lautet $(-1, 2) \cap [0, \infty) = [0, 2)$. Schließlich ist noch $0 \leq \sqrt{x} < 2$ zu lösen. Die Lösung der gegebenen Ungleichung lautet $[0, 4)$. \square

iii. $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) \geq \log_{\frac{1}{2}}(\ln(e^x+1))$

Lösung Die Existenzbedingung lautet $x > -1$ (beachte: $e^x + 1 > 1 \Rightarrow \ln(e^x + 1) > 0$). Da die Logarithmusfunktion zur Basis $\frac{1}{2}$ streng fallend ist, ist die gegebene Ungleichung zu $x + 1 \leq \ln(e^x + 1)$ äquivalent. Da $x \mapsto e^x$ streng steigend ist, ist sie weiter zu $e^{x+1} \leq e^x + 1$ und somit zu $e^x \leq \frac{1}{e-1}$ äquivalent. Die Lösung der letzten Ungleichung lautet $x \leq \ln \frac{1}{e-1}$. Zusammen mit der Existenzbedingung folgt $-1 < x \leq -\ln(e-1)$. \square

iv. $\log_2^2(4x+8) - \log_2(x+2) - 2 \leq 0$

Lösung Die Existenzbedingung lautet $x > -2$. Hier ist auf die Rechenregeln gut zu achten. Es ist

$$\begin{aligned} \log_2^2(4(x+2)) - \log_2(x+2) - 2 \leq 0 &\iff (\log_2(x+2) + \log_2 4)^2 - \log_2(x+2) - 2 \leq 0 \iff \\ &\log_2^2(x+2) + 3\log_2(x+2) + 2 \leq 0. \end{aligned}$$

Diese Ungleichung ist quadratisch in $\log_2(x+2)$. Es ist $t^2 + 3t + 2 \leq 0 \iff t \in [-2, -1]$ und damit noch $-2 \leq \log_2(x+2) \leq -1$ zu lösen. Da $y \mapsto 2^y$ streng steigt, folgt die äquivalente Ungleichung $2^{-2} \leq x+2 \leq 2^{-1}$. Die Lösung lautet $-\frac{7}{4} \leq x \leq -\frac{3}{2}$. \square

v. $\lg 2 + \lg(4^{x-2} + 9) \leq 1 + \lg(2^{x-2} + 1)$

Lösung Der Definitionsbereich ist \mathbb{R} . Es gilt wegen der streng steigenden Monotonie von $x \mapsto \lg x$:

$$\begin{aligned} \lg 2 + \lg(4^{x-2} + 9) \leq 1 + \lg(2^{x-2} + 1) &\iff \lg(2(4^{x-2} + 9)) \leq \lg(10(2^{x-2} + 1)) \iff \\ 2(4^{x-2} + 9) \leq 10(2^{x-2} + 1) &\iff 4^{x-2} - 5 \cdot 2^{x-2} + 4 \leq 0. \end{aligned}$$

Das ist eine quadratische Ungleichung in 2^{x-2} mit der Lösung $x \in [2, 4]$. \square

vi. $\log_a x - \log_{a^2} x + \log_{a^4} x \geq \frac{3}{4}$

Lösung Die Existenzbedingungen lauten hier $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$. Wir bringen alle Logarithmen auf die gleiche Basis a . Damit lautet die Ungleichung:

$$\log_a x - \frac{\log_a x}{\log_a a^2} + \frac{\log_a x}{\log_a a^4} \geq \frac{3}{4}$$

Weitere Umformungen ergeben

$$\log_a x - \frac{1}{2} \log_a x + \frac{1}{4} \log_a x \geq \frac{3}{4} \iff \frac{3}{4} \log_a x \geq \frac{3}{4} \iff \log_a x \geq 1 \iff \log_a x \geq \log_a a.$$

Ist $0 < a < 1$, so ist $x \mapsto \log_a x$ streng monoton fallend und dann ist die Lösung der letzten Ungleichung genau $0 < x \leq a$.

Im Falle $a > 1$ ist $x \mapsto \log_a x$ streng monoton steigend; dann ist die Ungleichung $\log_a x \geq \log_a a$ zu $x \geq a$ äquivalent. \square

vii. Man bestimme $m \in \mathbb{R}$ so, dass $(m-1)\ln^2 x - (m+1)\ln x + m+1 > 0$ für alle $x > 0$ gilt.

Lösung Mit der Substitution $t := \ln x$ muss $(m-1)t^2 - (m+1)t + m+1 > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gelten. Das ist genau dann der Fall, wenn $m-1 > 0$ (Parabel nach oben geöffnet) und $\Delta := (m+1)^2 - 4(m-1)(m+1) = m^2 + 2m + 1 - 4m^2 + 4 = -3m^2 + 2m + 5 < 0$ gilt. Das ergibt $m \in (\frac{5}{3}, \infty)$. \square

Ungleichungen mit Winkel- und Arkusfunktionen

i.

$$\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \geq 0$$

Lösung Die Existenzbedingungen lauten $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$, denn genau dann gilt $\sin x - \cos x \neq 0$. Es fällt die gleiche Struktur im Zähler und im Nenner auf. Erweitert man den Bruch mit $\frac{\sqrt{2}}{2}$ so kann man mittels Additionstheorem die Ausdrücke vereinfachen. Es gilt

$$\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x}{\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x} = \frac{\cos \frac{\pi}{4} \sin x + \sin \frac{\pi}{4} \cos x}{\cos \frac{\pi}{4} \sin x - \sin \frac{\pi}{4} \cos x} = \frac{\sin(x + \frac{\pi}{4})}{\sin(x - \frac{\pi}{4})}$$

Wir müssen also die Ungleichung $\frac{\sin(x + \frac{\pi}{4})}{\sin(x - \frac{\pi}{4})} \geq 0$ lösen. Dafür reicht es, die Ungleichungssysteme

$$\begin{cases} \sin(x + \frac{\pi}{4}) \geq 0 \\ \sin(x - \frac{\pi}{4}) > 0 \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} \sin(x + \frac{\pi}{4}) \leq 0 \\ \sin(x - \frac{\pi}{4}) < 0 \end{cases}$$

zu lösen und deren Lösungsmengen zu vereinigen.

Zum ersten System: Es gelten

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \iff x + \frac{\pi}{4} \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, \pi + 2k\pi] \iff x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right]$$

und

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0 \iff x - \frac{\pi}{4} \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi, \pi + 2k\pi) \iff x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right).$$

Somit ist die Lösung des ersten Systems die Schnittmenge dieser zwei Lösungsmengen

$$\text{und das ist } \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right).$$

Löst man analog das zweite System (bzw. macht man sich die Lösung des ersten Systems zu Nutze und betrachtet – eventuell bis auf den Rand – die Komplementärmengen), so ergibt sich die Lösung

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi, \frac{3\pi}{4} + (2k+1)\pi\right).$$

Die Lösungsmenge der gegebenen Ungleichung ist somit $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi\right)$. \square

ii.

$$\sqrt{3} \cos(2x) - \sin(2x) \leq 1$$

Hinweis: Man multipliziert die Ungleichung mit $\frac{1}{2}$ und verwende das Additionstheorem.

Lösung Es ist $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos(2x) - \frac{1}{2} \cdot \sin(2x) \leq \frac{1}{2} \iff \sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos(2x) - \cos \frac{\pi}{3} \cdot \sin(2x) \leq \frac{1}{2} \iff \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) \leq \frac{1}{2} \iff \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \geq -\frac{1}{2}$. Nun tragen wir auf der y -Achse $-\frac{1}{2}$ ein und ziehen durch diesen Punkt eine Parallele zur x -Achse. Diese schneidet den Einheitskreis in zwei Punkten, die wir mit z. B. $\frac{7\pi}{6}$ (im 3. Quadranten) und mit $-\frac{\pi}{6}$ (im 4. Quadranten) markieren. Es gilt dann

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \geq -\frac{1}{2} \iff 2x - \frac{\pi}{3} \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right] \iff$$

$$2x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right] \iff x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi\right]$$

\square

iii.

$$\arcsin(1-x) < \arcsin(2x)$$

Lösung Die Existenzbedingungen lauten hier wegen des Definitionsbereichs von Arkussinus wie folgt: $-1 \leq 1-x \leq 1$ und $-1 \leq 2x \leq 1$. Das ergibt $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Da $y \mapsto \arcsin y$ eine streng monoton steigende Funktion ist, ist die Ungleichung auf ihrem Existenzbereich zu $1-x < 2x$ äquivalent, also zu $x > \frac{1}{3}$. Somit lautet die Antwort $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$. \square

iv.

$$\arcsin x < \arccos x$$

Lösung Der Definitionsbereich ist hier $[-1, 1]$. Da der Hauptzweig des Arkuskosinus Werte in $[0, \pi]$ nimmt und dort Sinus nicht monoton ist, dürfen wir Sinus nicht ohne Vorsichtsmaßnahmen und Einschränkungen auf diese Ungleichung anwenden.

Da $x \mapsto \arcsin x$ streng monoton steigend und $x \mapsto \arccos x$ streng monoton fallend ist, brauchen wir lediglich die Gleichung $\arcsin x = \arccos x$ zu lösen. Bezeichnet x_0 die eindeutige Lösung der zugehörigen Gleichung, so ist die Lösung der gegebenen Ungleichung das Intervall $[-1, x_0)$.

Man kann die Lösung der zugehörigen Gleichung erraten ($x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, da $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$) oder auf die Gleichung $\arcsin x = \arccos x$ den Sinus anwenden. Wir müssen dabei aber beachten, dass dies keine Äquivalenzumformung ist (da Sinus auf $[0, \pi]$ nicht bijektiv ist). Wir erhalten also lediglich eine notwendige Gleichung: $\sin(\arcsin x) = \sin(\arccos x)$. Da $\arccos x \in [0, \pi]$ und dort der Sinus nichtnegativ ist, gilt $\sin(\arccos x) = +\sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - x^2}$. Es werden also zunächst die Lösungen der Gleichung $x = \sqrt{1 - x^2}$ gesucht. Da $\sqrt{1 - x^2} \geq 0$ ist, muss $x \geq 0$ gelten. Die eindeutige Lösung lautet $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Die Probe bestätigt diese als Lösung der Gleichung $\arcsin x = \arccos x$. Somit ist die Lösungsmenge der gegebenen Ungleichung $[-1, \frac{\sqrt{2}}{2})$. \square