ÜBUNG 11

Definition 0.1 (Zufallsgröße oder Zufallsvariable/Verteilung). *Sei* (Ω, P) *ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum, dann nennen wir eine Funktion*

$$X : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mit } \omega \mapsto X(\omega) = r$$

eine Zufallsgröße oder Zufallsvariable auf Ω.
$X(\omega)$ *heißt Wert von* X *zum Ausgang* ω *oder kurz der Wert der Zufallsgröße.*

Definition 0.2 (Verteilung einer Zufallsvariable). *Eine (reellwertige) Funktion*

$$W : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } x \mapsto W(x) = P(\{X = x\}) := P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\})$$

nennen wir eine Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion der Zufallsgröße X *oder kurz eine Verteilung von* X. *Es ist also* $P(\{X = x\})$ *(oder kurz* $P(X = x)$ *) die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsgröße* X *bzgl.* ω *den Wert* x *annimmt.*

Definition 0.3 (Erwartungsgwert einer Zufallsvariable). *Eine Zufallsgröße* X *habe die reelle Wertemenge* $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subseteq \mathbb{R}$ *mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten* $W(x_i)$. *Dann heißt die Zahl*

$$E(X) := \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot W(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$$

der Erwartungswert der Zufallsgröße X.

Definition 0.4 (Varianz einer Zufallsvariable). *Sei E(X) der Erwartungswert einer Zufallsgröße X. Die Varianz von X ist dann definiert als der Erwartungswert der quadratischen Abweichung von E(X), es gilt also: Die Zufallsgröße X habe die Wertemenge* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *und seien die Wahrscheinlichkeiten mit* $P(X = x_1), \ldots$ *bezeichnet. Dann heißt die Zahl*

$$V(X) := E((X - E(X))^2) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 \cdot P(X = x_i)$$

die Varianz der Zufallsgröße X *oder mittlere quadratische Abweichung.*

Es gibt noch eine vereinfachte Berechnung für die Varianz, die wir jetzt Montag beweisen werden. Es gilt:

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Aufgabe 1

a) Ein Basketballspieler trifft beim Freiwurf durchschnittlich in der Hälfte der Versuche. Man zeige, dass die Wahrscheinlichkeit, dass er bei 8 Würfen mindestens 4 mal trifft, zwischen $\frac{5}{8}$ und $\frac{2}{3}$ liegt.

b) Man zeige, dass man auf $3^s - 3 \cdot 2^s + 3 \cdot 1^s$ verschiedene Arten s verschiedene Bücher auf 3 Schüler so verteilen kann, dass kein Schüler leer ausgeht.

c) In einer Urne sind schwarze und weiße Kugeln. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man bei gleichzeitigem Herausgreifen von zwei Kugeln zwei verschiedenfarbige erhält, ist $\frac{5}{9}$. Man zeige, dass dann entweder 5 weiße und 5 schwarze oder 5 weiße und 4 schwarze Kugeln in der Urne sein können.

Aufgabe 2

Ein Spielautomat hat zwei unabhängig voneinander drehende Walzen, die jeweils eine der Früchte Kiwi, Birne oder Banane anzeigen.
Die Wahrscheinlichkeit, dass dabei eine Walze eine bestimmte Frucht zeigt, ist für Kiwi 10%, für Birne 30% und für Banane 60%.

a) Der Automat zahlt einen Gewinn aus, wenn beide Walzen die gleiche Frucht anzeigen.

   i) Man zeige, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit kleiner als $\frac{1}{2}$ ist.

   ii) Man berechne, wie viele Spiele mindestens gespielt werden müssten, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens einmal beide Walzen eine Banane (Ereignis: Doppelbanane) anzeigen, größer als 90% ist.

b) Der Automat zahlt 2 Euro aus, wenn "Doppelkiwi" angezeigt wird. Man berechne die Auszahlungen für die Ereignisse "Doppelbirne" und "Doppelbanane", wenn folgende Bedingungen erfüllt sein sollen:

- Der Einsatz bei einem Spiel beträgt $20ct$.
- Das Spiel soll fair sein.
- Der Gewinn soll beim Eintreffen von "Doppelbirne" viermal so hoch sein wie beim Eintreffen von "Doppelbanane".

c) Fritz spielt n-mal, aber höchstens 50-mal. Das Ergebnis "Doppelbanane" wird genauso oft angezeigt, wie man es erwarten würde. Man bestimme, wie oft der Spielausgang "Doppelbanane" war.

Aufgabe 3

Aus einer Urne mit 4 schwarzen und 6 weißen Kugeln werden 3 Kugeln mit einem Griff gezogen. Sei X die Zufallsvariable, welche die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln angibt. Man berechne für X die Verteilung, den Erwartungswert und die Varianz.

Aufgabe 4

a) Wir würfeln n-mal mit einem Würfel. Sei X_i die Augenzahl bei Wurf i, wobei $i = 1, ..., n$. Es sei $S = X_1 + ... + X_n$ die Augensumme. Bestimmen Sie den Erwartungswert.

b) In einer Urne liegen 49 nummerierte Kugeln, es werden 6 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen (Lotto). Wir tippen auf 6 verschiedene Kugeln. Es sei S die Anzahl der Richtigen. Bestimmen Sie den Erwartungswert von S.

Aufgabe 5

Jens und Anna setzen für ein Spiel jeweils 5 Euro Einsatz ein. Es sind drei Urnen gegeben, in der ersten Urne sind 3 weiße und 5 schwarze, in der zweiten 4 weiße und 3 schwarze und der dritten auch 4 weiße und 3 schwarze Kugeln. Jens zieht eine Kugel aus der ersten und legt sie in die zweite Urne. Anschließend zieht Jens eine Kugel aus der zweiten und legt sie in die dritte Urne. Zuletzt zieht Jens eine Kugel aus der dritten Urne, ist sie schwarz, dann erhält Anna den gesamten Einsatz (also 10 Euro), andernfalls gewinnt Jens. Wer ist in Vorteil? Definieren Sie dazu den Erwartungswert der Zufallsgröße „Gewinn von Jens“. Können die Einsätze so gewählt werden, dass das Spiel fair ist?